

抵抗が多数つながった回路に流れる電流を求めるときに用いられるのはどれか。

- a オームの法則
- b ファラデーの法則
- c ジュールの法則
- d フレミングの法則
- e キルヒホッフの法則

- 1. a, b      2. a, e      3. b, c
- 4. c, d      5. d, e

## オームの法則

電気抵抗のある部位に 1A の電流が通り、1V の電圧が発生したときの電気抵抗を 1  $\Omega$  (オーム) と定義するので、R ( $\Omega$ ) の抵抗に I (A) の電流が通ると、発生する電圧 E は、

$$E = I R$$

## ファラデーの法則 (電磁誘導)

電流の通る部位に磁界がある場合、磁束  $\phi$  が1秒間に変化する割合と、発生電圧(誘導起電力) E の関係は

$$E = d\phi / dt$$

## ジュールの法則

電気抵抗  $R(\Omega)$  の部位に  $I$  A の電流が通るときに1秒間で発生する熱エネルギー(ジュール熱)  $P$  ( $W = J/s$ ) は、

$$P = R I^2 = E I$$

## フレミングの法則

電流  $I$  の通る電線に直交する向きに磁界(磁束密度  $B$ )がある場合、電流および磁界と直交する向きの力  $F$  が電線にはたらく。

$$F = I B$$

# キルヒホッフの法則

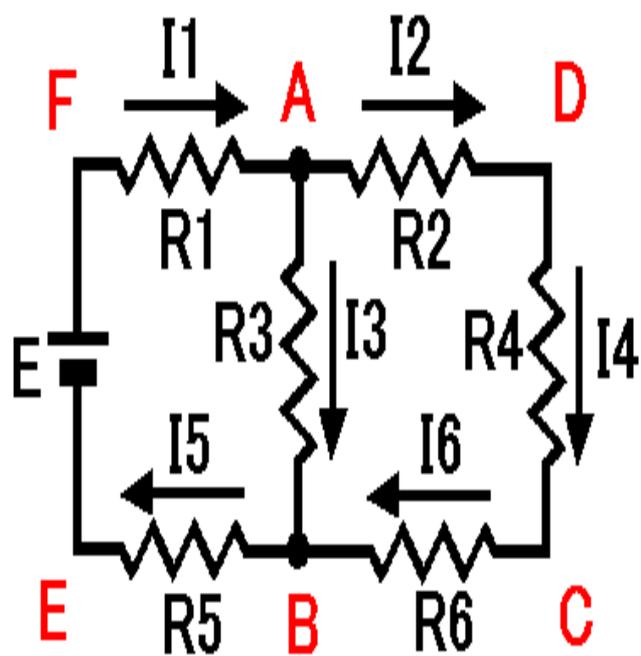
電気回路の中では、どの点でも電流の入出力和は 0 である。

(= 電流は、自然に湧いたり消えたりしない。)

電気回路の中では、どの閉回路でも電圧の和は 0 である。

(= 電圧は、自然に湧いたり消えたりしない。)

当たり前な法則だが、複雑な回路計算に便利。



A点の電流和  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

B点の電流和  $I_3 + I_6 - I_5 = 0$

閉回路 ABCDA の電圧和  $I_3R_3 - I_6R_6 - I_4R_4 - I_2R_2 = 0$

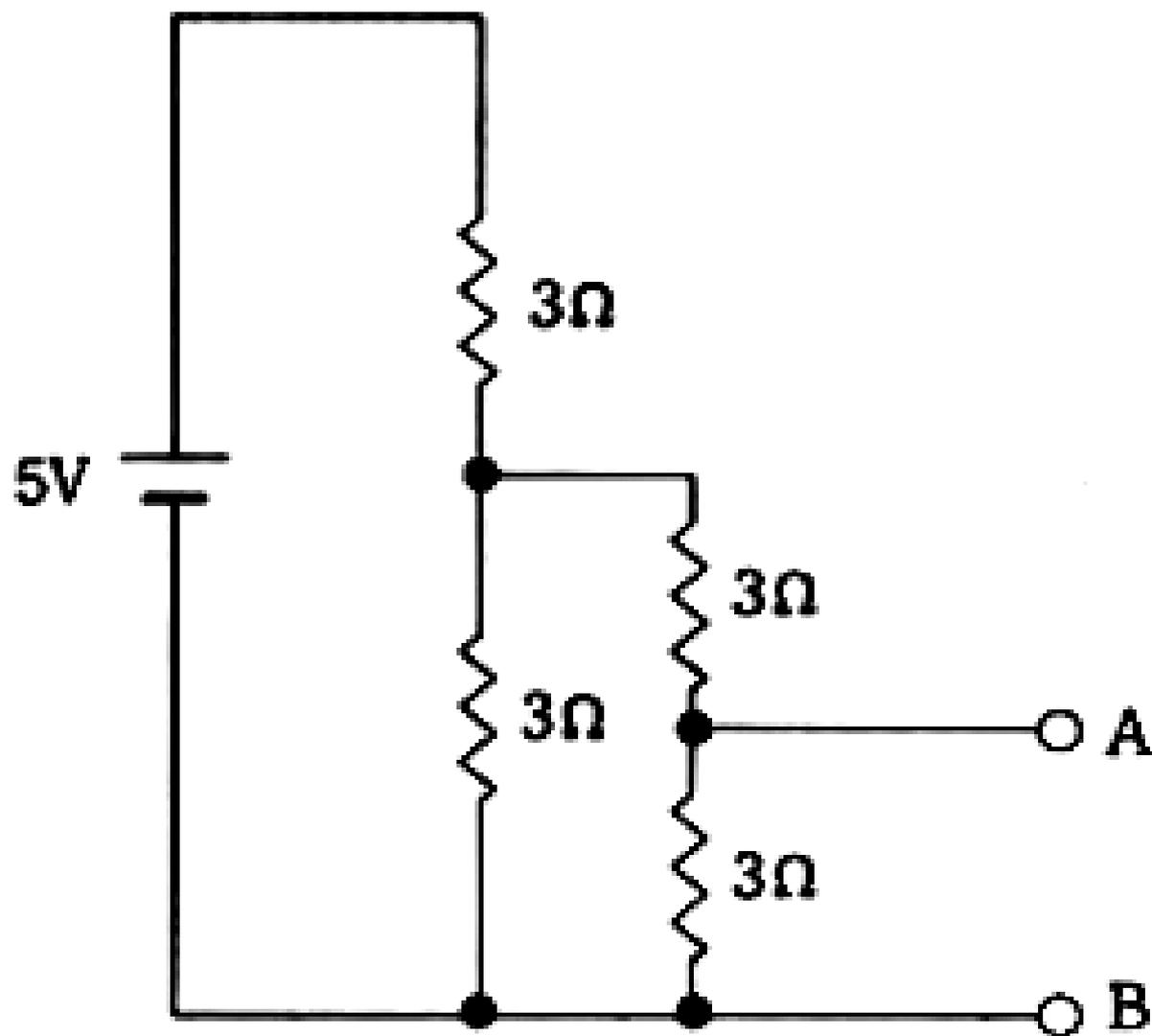
閉回路 ABEFA の電圧和  $I_3R_3 + I_5R_5 - E + I_1R_1 = 0$

各素子の電流の向きは、適当に決めれば良い。

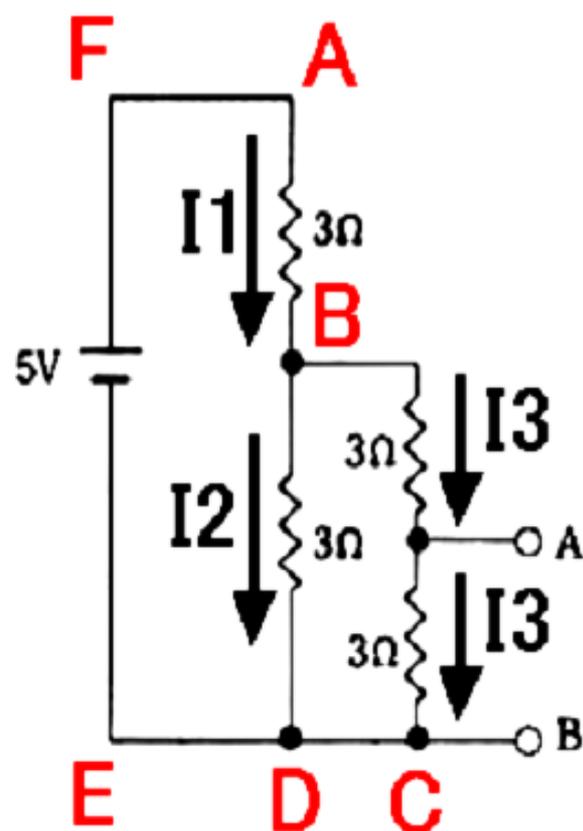
向きが逆であれば、マイナスの電流値が算出される。

図の回路で、AB間の電圧(V)はどれか。

1. 0.75
2. 1.0
3. 1.25
4. 1.5
5. 2.5



## キルヒホッフの法則



**B点の電流和**  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

**閉回路 ABDEFA の電圧和**

$$3I_1 + 3I_2 - 5 = 0$$

**閉回路 BCDB の電圧和**

$$3I_3 + 3I_3 - 3I_2 = 0$$

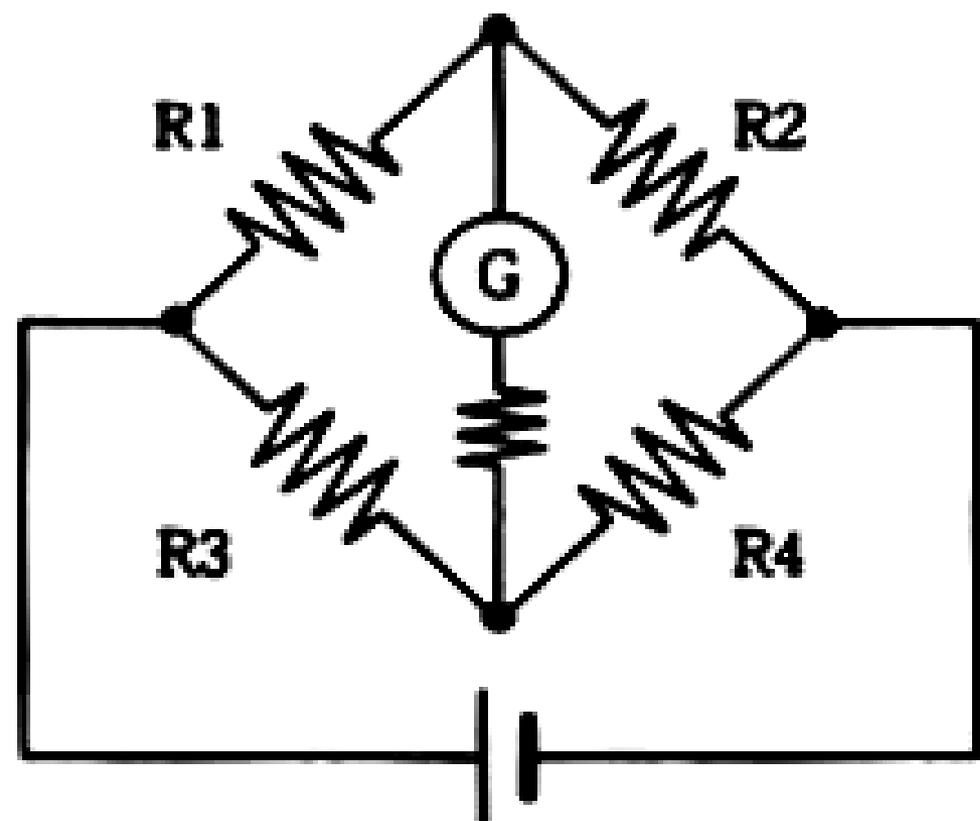
変数は  $I_1, I_2, I_3$  の3個なので、  
式は3個あれば解ける。

$$I_1 = 1(\text{A}), \quad I_2 = 2/3 (\text{A}), \quad I_3 = 1/3 (\text{A})$$

$$\text{求める電圧は、} \quad 3 \times 1/3 = 1 (\text{V})$$

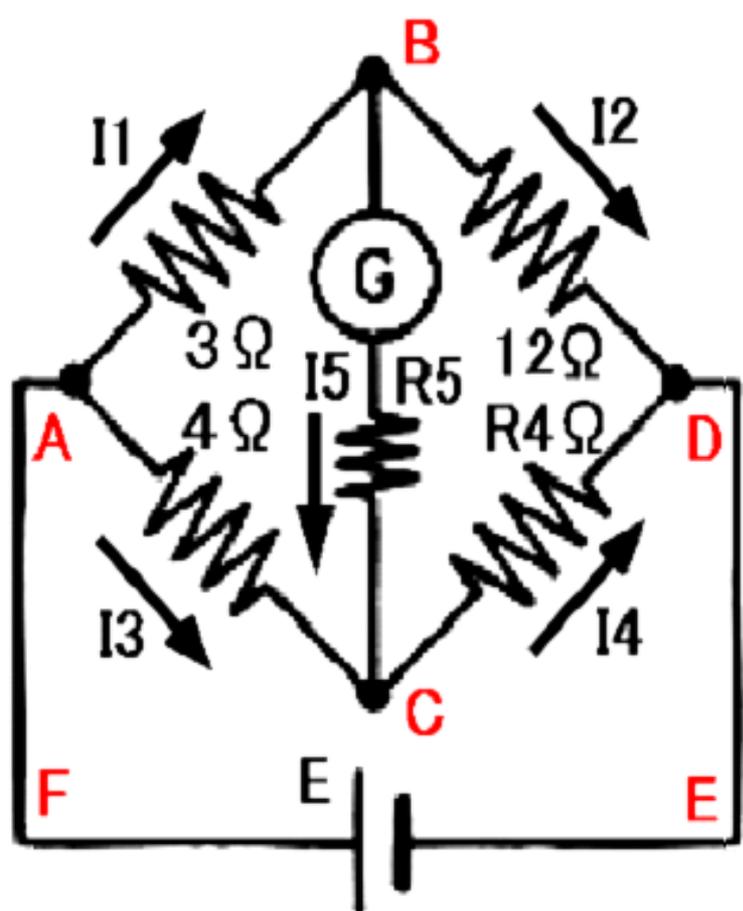
222 ☆

ホイート・ストーン・ブリッジ回路中の検流計 G に電流が流れない時の R4 の抵抗値はどれか。  
ただし、 $R1 = 3 \Omega$ 、 $R2 = 12 \Omega$ 、 $R3 = 4 \Omega$  とする。



- 1.  $2 \Omega$
- 2.  $4 \Omega$
- 3.  $8 \Omega$
- 4.  $16 \Omega$
- 5.  $32 \Omega$

■ 4



メータ G に電流が流れない  $I_5 = 0$

B点の電流和  $I_1 - I_2 - I_5 = 0$   $I_1 = I_2$

C点の電流和  $I_3 + I_5 - I_4 = 0$   $I_3 = I_4$

閉回路 **ABCA** の電圧和  
 $3I_1 + R_5I_5 - 4I_3 = 0$   $3I_1 = 4I_3$

閉回路 **BCDB** の電圧和  
 $R_5I_5 + R_4I_4 - 12I_2 = 0$   $R_4I_4 = 12I_2$

これを解くと  $R_4 = 16$

閉回路 **ABDEFA** の電圧和  $3I_1 + 12I_2 - E = 0$

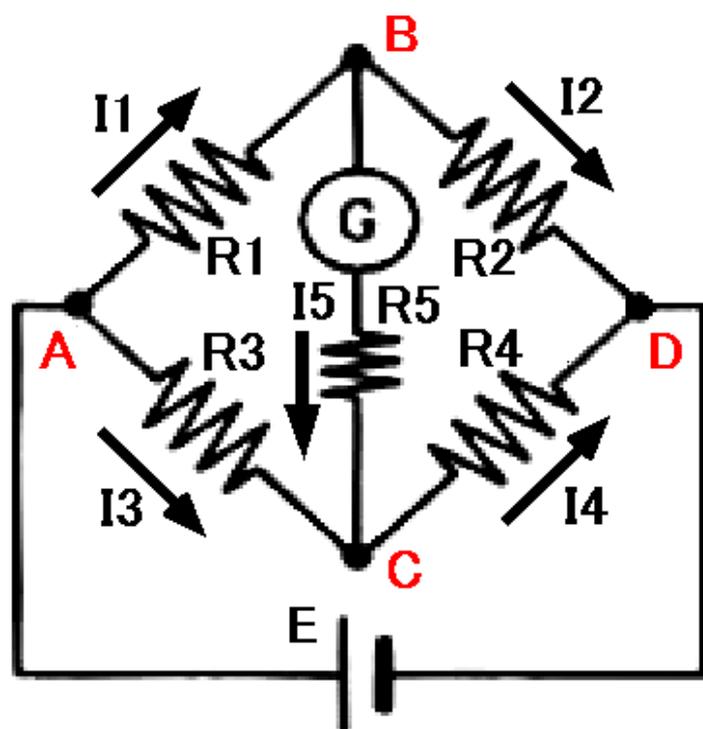
閉回路 **ACDEFA** の電圧和  $4I_3 + R_4I_4 - E = 0$

これを解くと  $I_1 = I_2 = 1/15 E$ 、  $I_3 = I_4 = 1/20 E$

(電流、電圧の具体的な値はどこにもないので、E の値は不定。)

# ホイートストンブリッジ回路

ホイートストンブリッジ回路は、対向する抵抗値の積が等しい場合に対角線の電流が0になる。



メータ G に電流が流れないときは、 $I_5 = 0$

B点の電流和  $I_1 - I_2 - I_5 = 0$   $I_1 = I_2$

C点の電流和  $I_3 + I_5 - I_4 = 0$   $I_3 = I_4$

閉回路 **ABCA** の電圧和

$$R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_3 I_3 = 0$$
  $R_1 I_1 = R_3 I_3$

閉回路 **BCDB** の電圧和

$$R_5 I_5 + R_4 I_4 - R_2 I_2 = 0$$
  $R_2 I_2 = R_4 I_4$

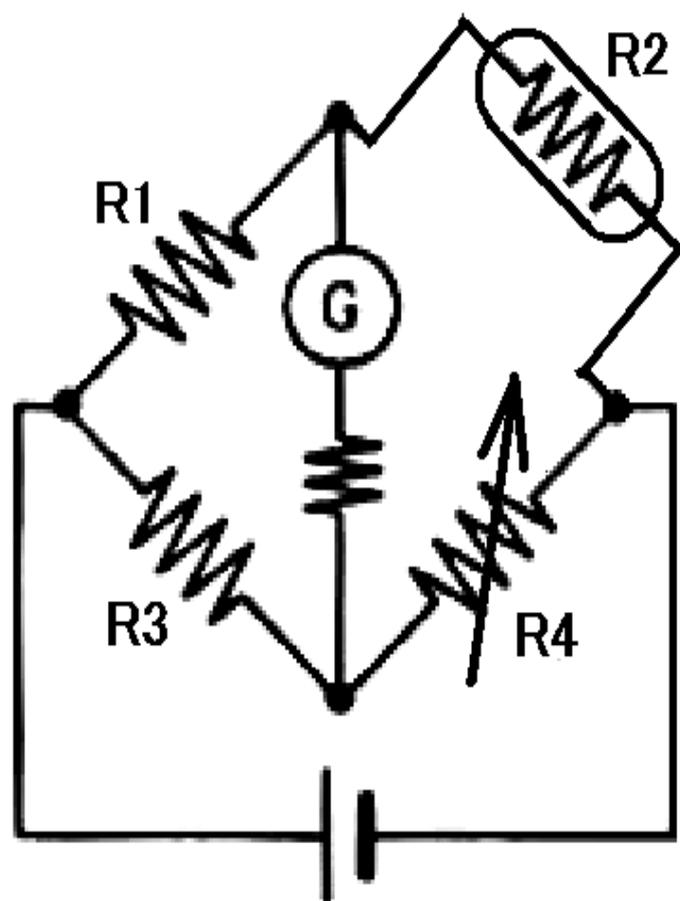
これを解くと、 $R_1 R_4 = R_2 R_3$

精度良く抵抗値を測定することができる回路で、

抵抗値が変化するトランスデューサ（サーミスタ、CdS、ストレインゲージなど）

の測定値検出回路に用いられる。

## ホイートストンブリッジ回路を利用した温度計



抵抗 R2 を サーミスタにする。

抵抗 R4 を 可変抵抗器(ボリューム)にする。

温度を測定したい部位にサーミスタを置くと、温度に対応した抵抗値 R2 を得る。

メータG を見ながらボリュームのつまみを回して、メータの針が 0 を指すように調整する。

ボリュームのつまみが示す目盛り(R4)と R2 は、正比例する。

$R1R4 = R2R3$  なので、

$$R2 = (R1/R3) R4$$

サーミスタの抵抗値と温度の関係から

あらかじめボリュームR4の目盛りを温度表示にしておけば、これで精度の良い温度計になる。

四角錐の各辺に1個ずつ抵抗器が接続された回路がある。AB間の合成抵抗は何 $\Omega$ か。ただし、抵抗器はすべて15 $\Omega$ とする。

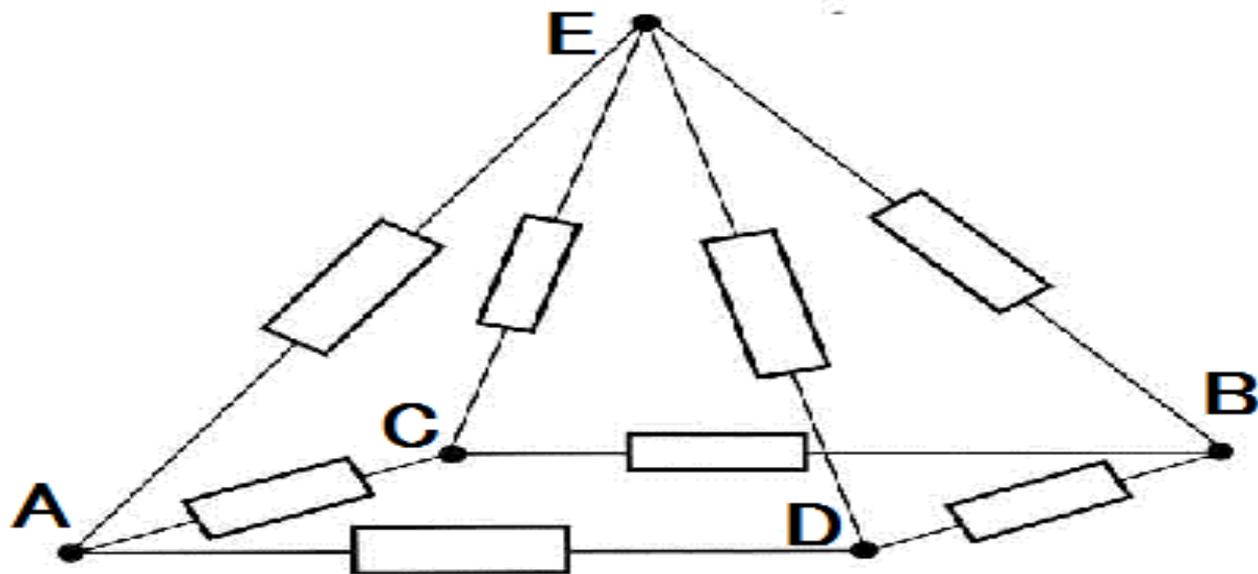
1) 2

2) 5

3) 7

4) 10

5) 15

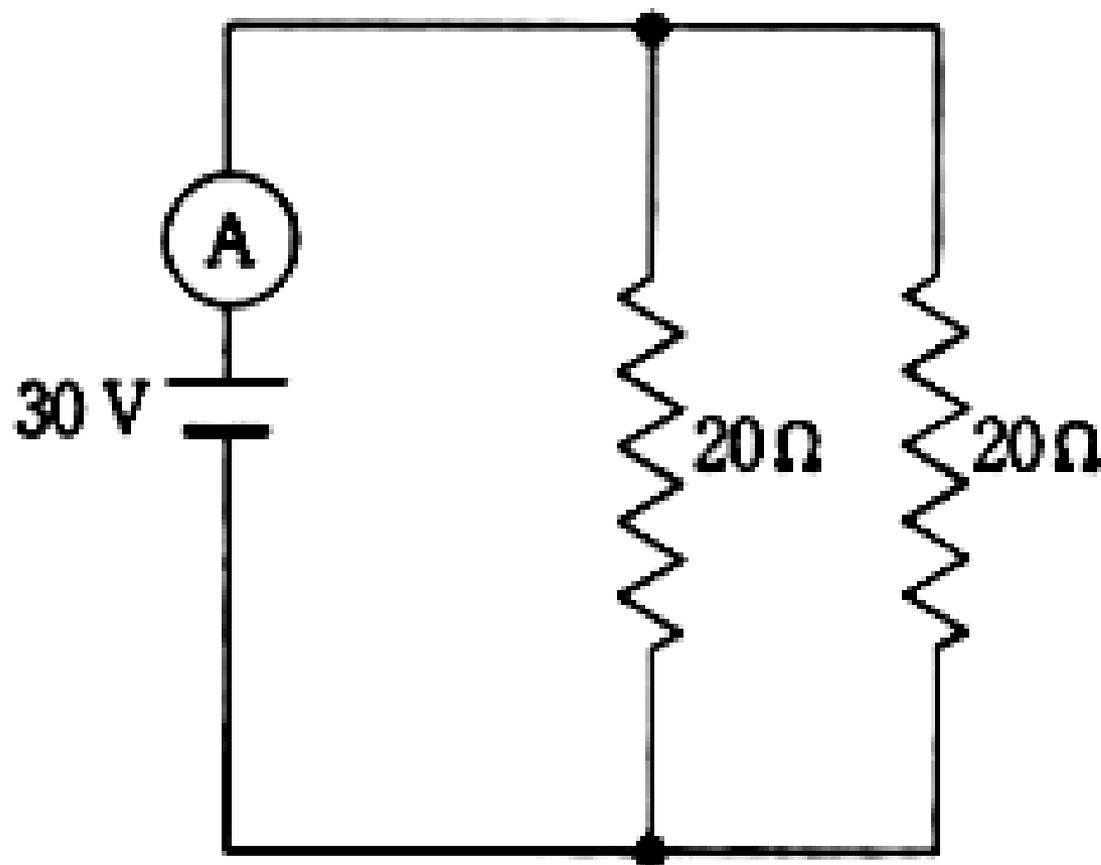


ホイートストーンブリッジ回路の法則から、経路CEDには電流が流れないので、経路CEDは存在しないと考えてよい。

よって、AB間には、30 $\Omega$ の抵抗が3列、並列接続していると考える。  $1 / ((1/30) + (1/30) + (1/30)) = 10 (\Omega)$

図の回路の電流計は何アンペア(A)か。

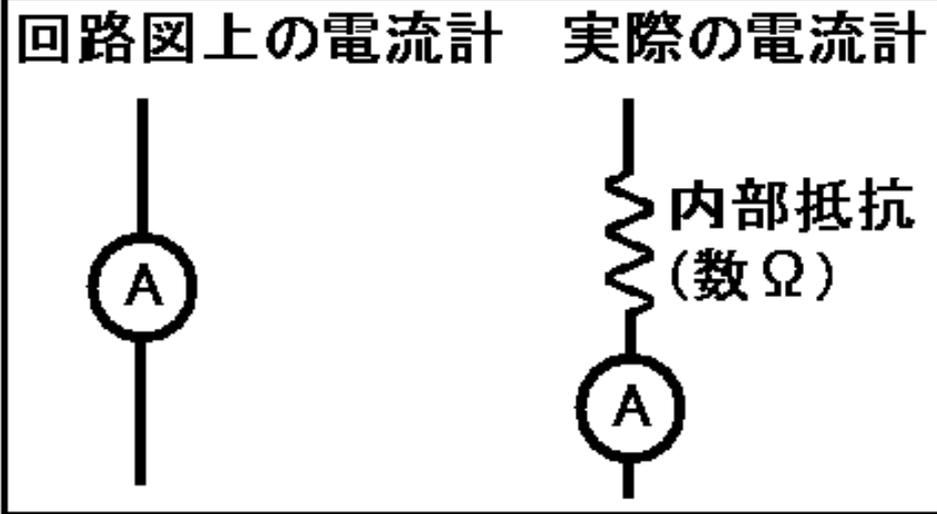
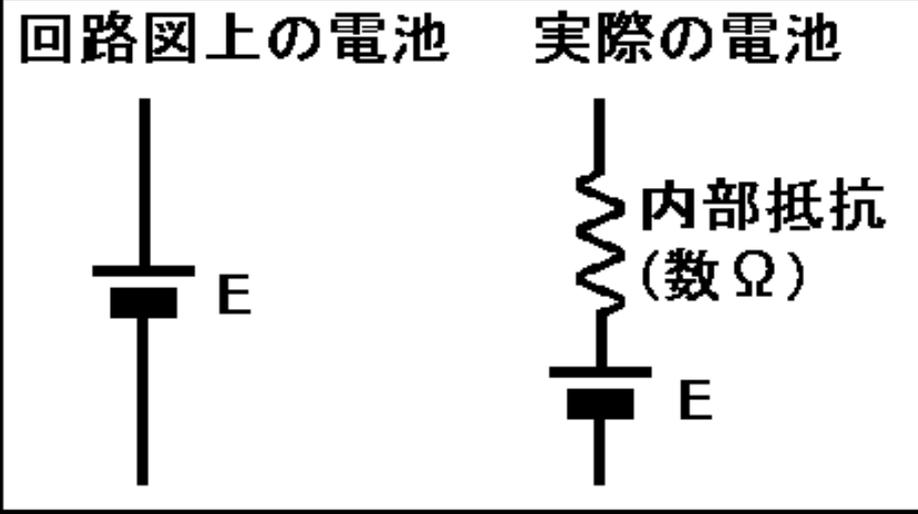
ただし、電池の内部抵抗を5オーム( $\Omega$ )とする。

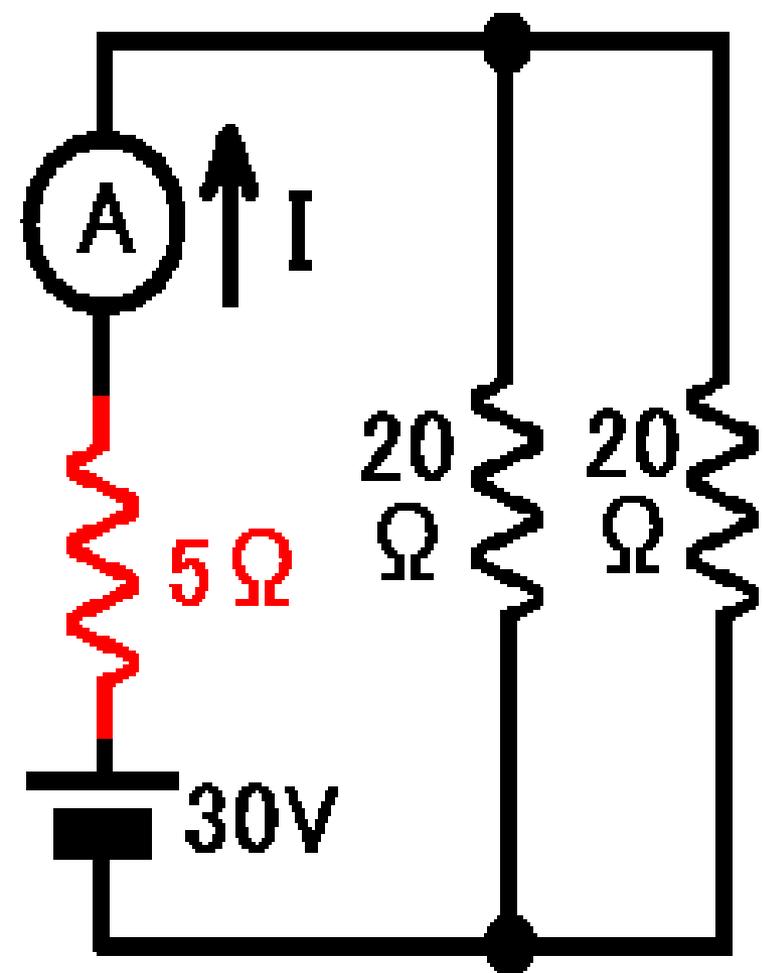


1. 0.67 A
2. 0.75 A
3. 1.25 A
4. 2.00 A
5. 3.00 A

# 内部抵抗

全ての電子素子は、電気抵抗をもつ。  
電子回路上の理論計算値と、実際に作動する回路での測定結果に誤差が生じることがよくある。  
内部抵抗は、誤差要因のひとつである。  
特に問題になる素子は、電池、メータ、コイル。  
内部抵抗を考慮した回路計算を行うことが重要。





20 Ω の抵抗2本の  
合成コンダクタンスGは、

$$1/20 + 1/20 = 1/10 \text{ (S)}$$

抵抗値は  $1/G = 10 \text{ (}\Omega\text{)}$

回路全体の合成抵抗値 R

$$R = 10 + 5 = 15 \text{ (}\Omega\text{)}$$

電流計が示す値 I は、

$$I = E/R = 30/15 = 2 \text{ (A)}$$

生体信号電圧を増幅するための最も適切な条件はどれか。

1. 増幅器は差動構成のものを使用するのがよい。
2. 電極は分極電圧の高いものを選ぶのがよい。
3. 増幅器の入力抵抗は小さいのがよい。
4. 前置増幅器にはFETよりトランジスタを使用するのがよい。
5. 電源はドリフトの大きいものを使用するのがよい。

**〔注解〕** 1. 生体信号を増幅する場合は雑音として混入する交流電圧や電源電圧の変動といった同相成分が問題となる。このような同相成分を除去するためには差動構成された増幅器が有効である。

2. 電極は銀-塩化銀電極のような不分極電極を使用することが、雑音の少ない信号を得るために望ましい。

3, 4. 生体信号を電極を介して増幅する場合、その信号源抵抗は非常に大きいいため、電圧増幅のためにはこれよりも十分に大きな入力抵抗をもつ増幅器が必要であり、このための増幅器の初段はFETのような高入力抵抗をもったトランジスタが必要である。

5. 電源のドリフトは同相電圧であるため、できるだけ電圧変動の小さい電源を用いることが必要である。

# 増幅器 (アンプ) Amplifier

生体から得る電気信号(電圧信号)は微弱である。

体表電極と測定する組織の間にある組織のインピーダンスの影響で、さらに入力信号の電圧は低下する。

これらの微弱電圧信号を測定するために、  
入力信号を電氣的に増幅する装置(増幅器)が必要。

## 前置(初段)増幅器 プリアンプ

入力信号を取り込み、ノイズを除去する回路。

## 最終(終段)増幅器 パワーアンプ

プリアンプから出た信号の電圧(電力)を上げる回路。

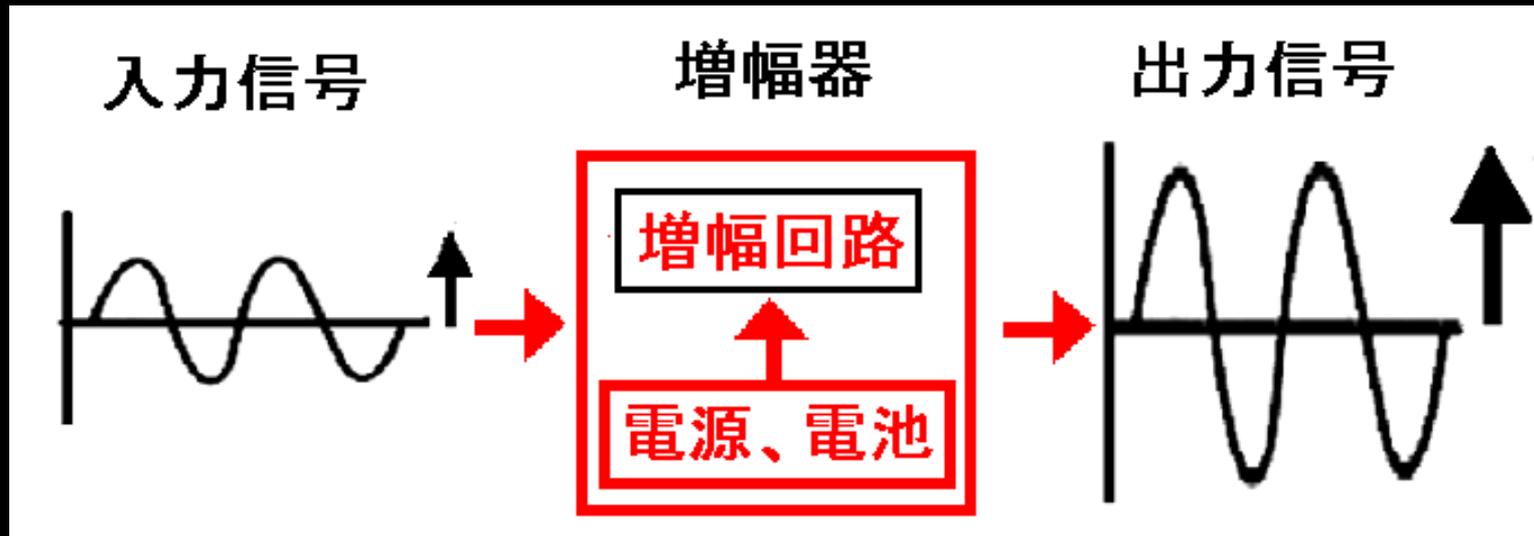
生体信号の電圧は非常に低い。数 $\mu\text{V}$ ~ $\text{mV}$ 程度。

脳波 1~500  $\mu\text{V}$

心電図 1~5  $\text{mV}$

筋電図 0.01~10  $\text{mV}$

増幅器は、電池または電源回路から電力を受取り、  
入力信号の電力エネルギーを増加して出力信号を  
出す。



生体信号は微弱な上に、様々な **ノイズ** が重なっている。

### **ドリフトノイズ（周波数 0.5 Hz 程度）**

胸郭の呼吸変動等による低周波ノイズ。基線変動を起こす。  
電極の装着不良、発汗、緊張、深呼吸で増強される。  
電源回路の電圧変動でも、出力信号に変動を生じる。

**商用交流ノイズ（Hum）（周波数 50Hz）**（西日本では 60Hz）  
壁をばう 100V 交流電源の電線や、装置内部の電源回路の  
トランスなどから、周波数50Hzの電磁波が出ている。  
検査ベッド位置の工夫、アース線の接地などで抑制できる。

### **筋電図（周波数 5～2000 Hz）**

電極と測定臓器の間に、近傍の筋肉から生じる電圧変動が  
測定値に加わるノイズ。体動、緊張、低温で増強される。

生体信号とノイズの周波数に差があれば  
CR回路などの周波数遮断フィルタでノイズ除去できるが、  
周波数が同じ場合には、別の方法で除去する必要がある。

## 主な生体信号の周波数

心電図 0.05~200 Hz

心音図 20~600 Hz

脳波 0.5~60 Hz

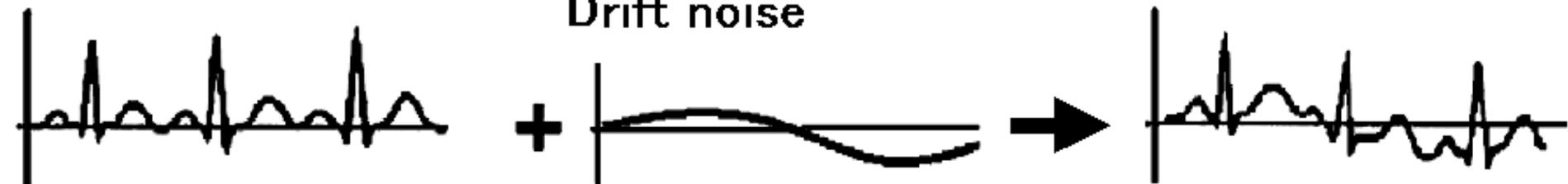
筋電図 5~2000 Hz

眼振図 0.05~20 Hz

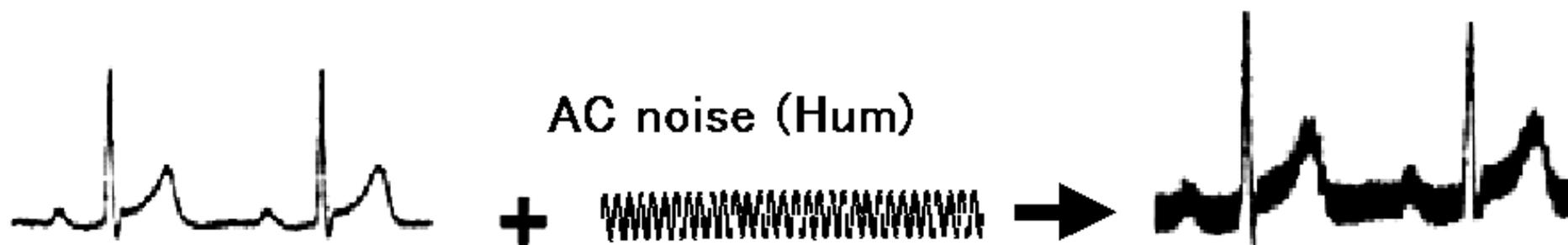
ほとんどの生体信号は、周波数フィルタだけでは  
ノイズ除去ができない。

# Electrocardiogram (ECG)

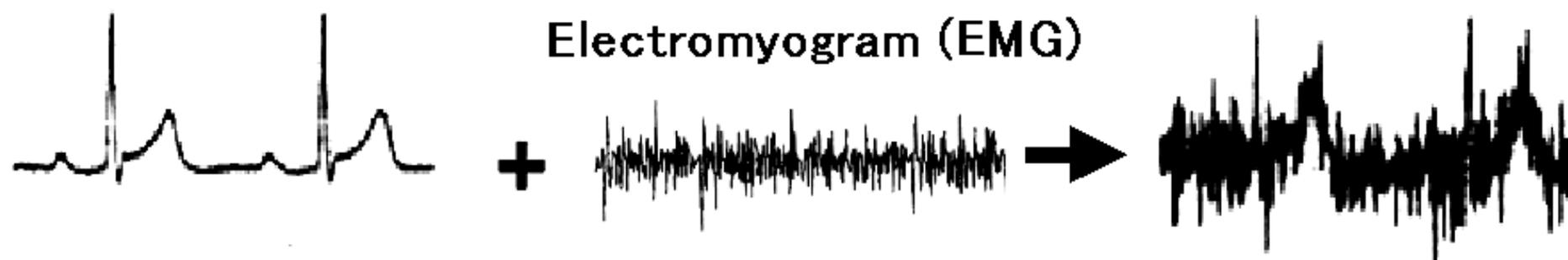
Drift noise



AC noise (Hum)

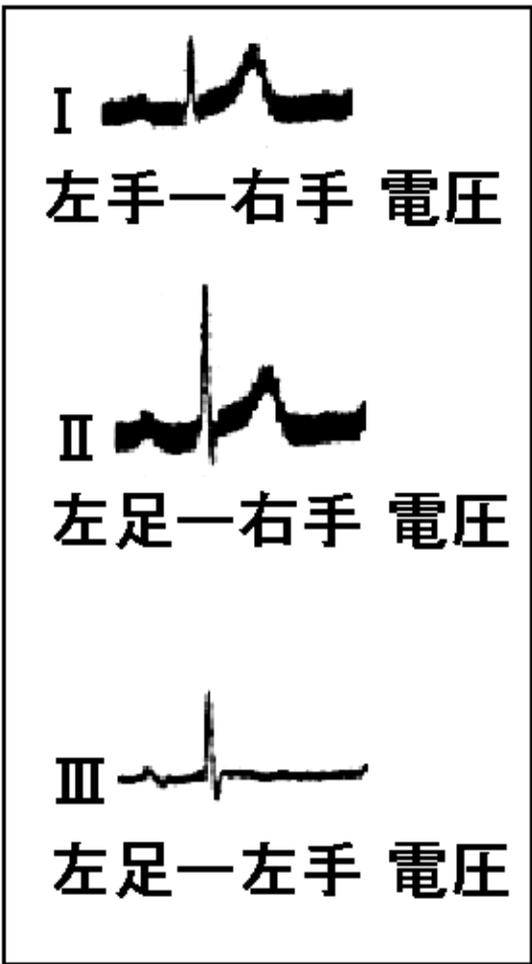
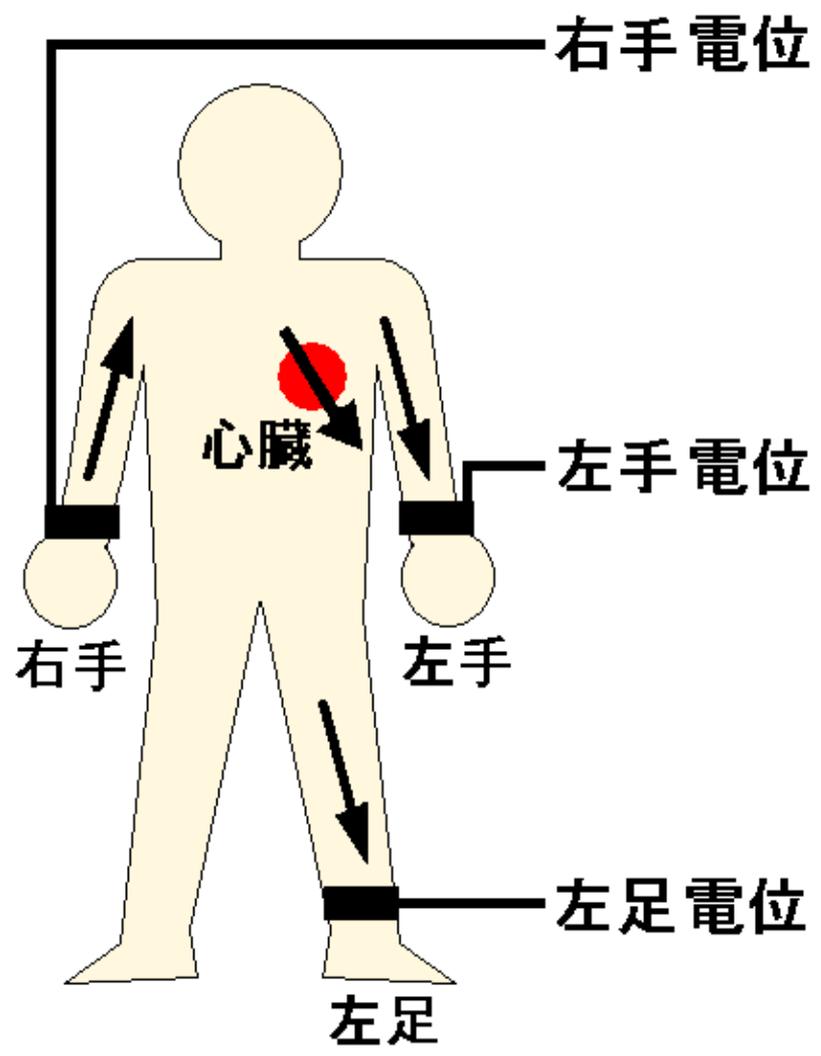


Electromyogram (EMG)

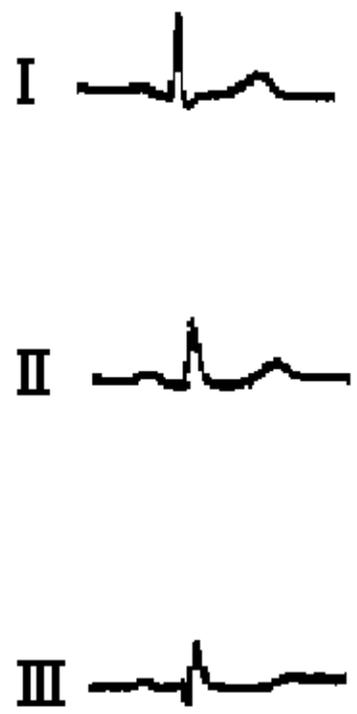


# 差動増幅器      差動増幅回路      Differential amplifier

## 心電図 標準肢誘導



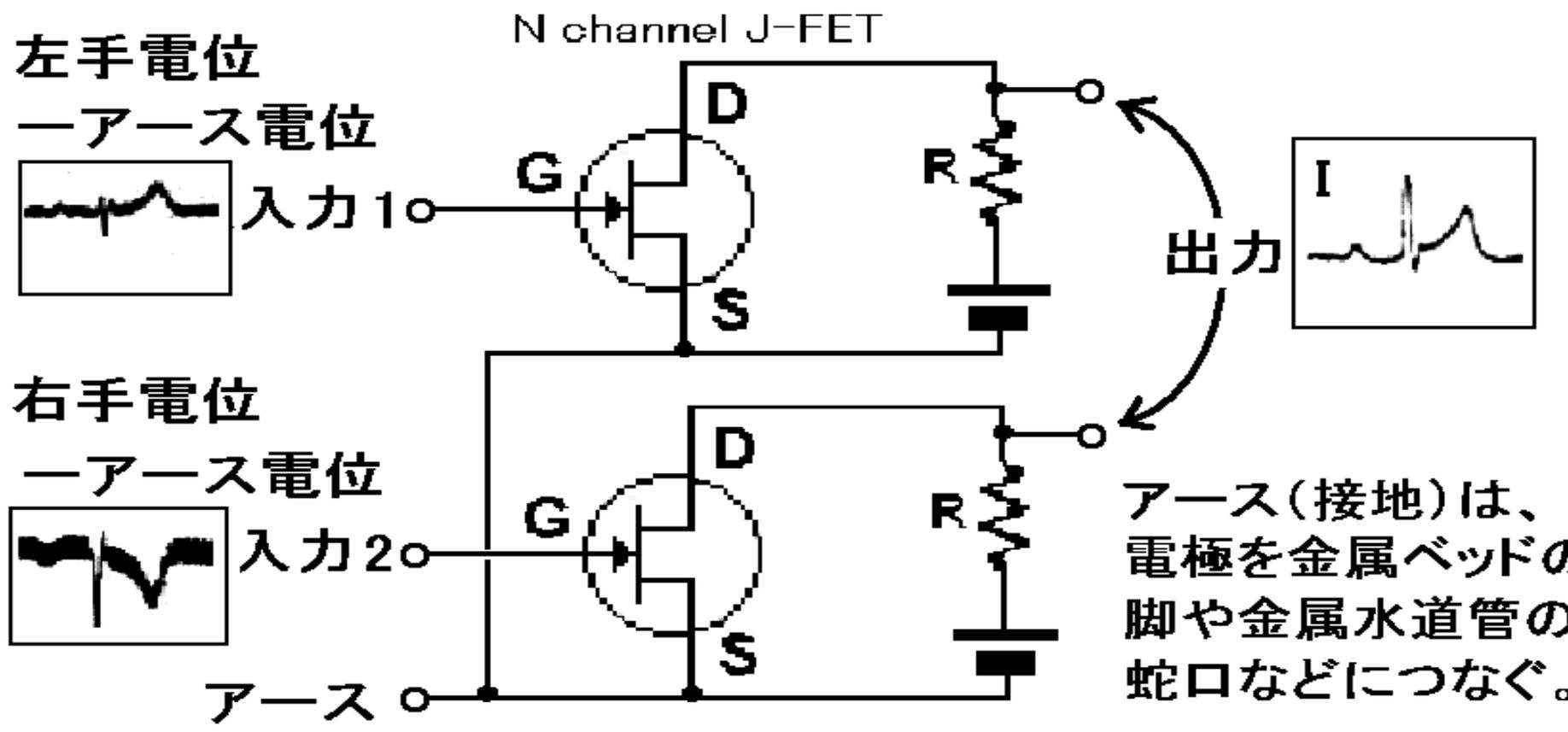
電極間の電位差を取り出す回路でノイズが減る。



# 差動増幅器 差動増幅回路 差動アンプ

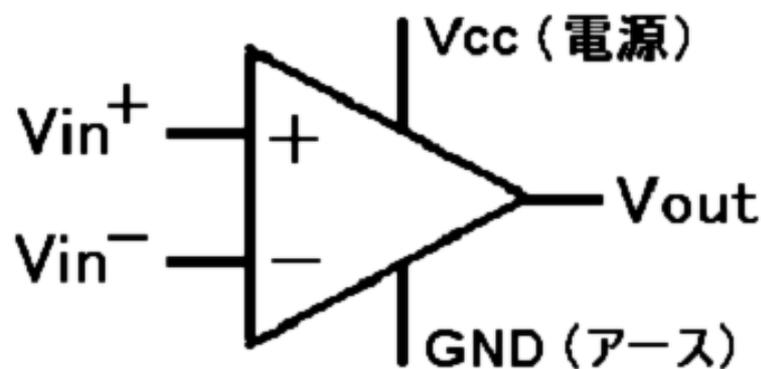
Differential amplifier

2つの電極の電位信号を入力して、それぞれの成分の  
同じ位相の信号成分（同相信号）を抑制して、  
違う位相の信号成分（逆相信号）を増幅する。

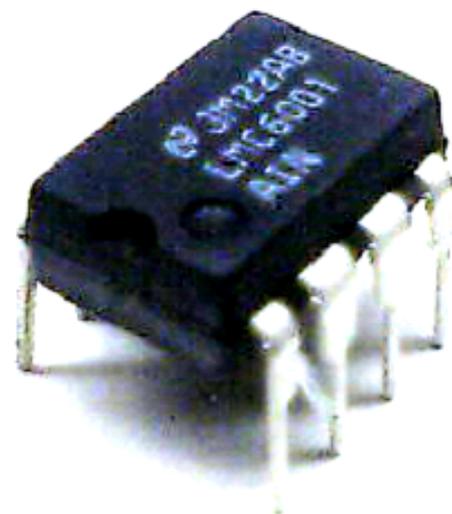


実際の差動増幅回路は、性能を良くするためより複雑な電子回路であり、集積回路(オペアンプ)で販売されているので、現在では増幅回路の回路図を詳細に記述する意義がなくなっている。

### 差動増幅回路オペアンプの回路図



差動増幅オペアンプ  
1個 230円



オペアンプ (OPアンプ) Operational amplifier

増幅器の基本回路だけを入れた IC。

様々な種類の増幅回路の製品がある。

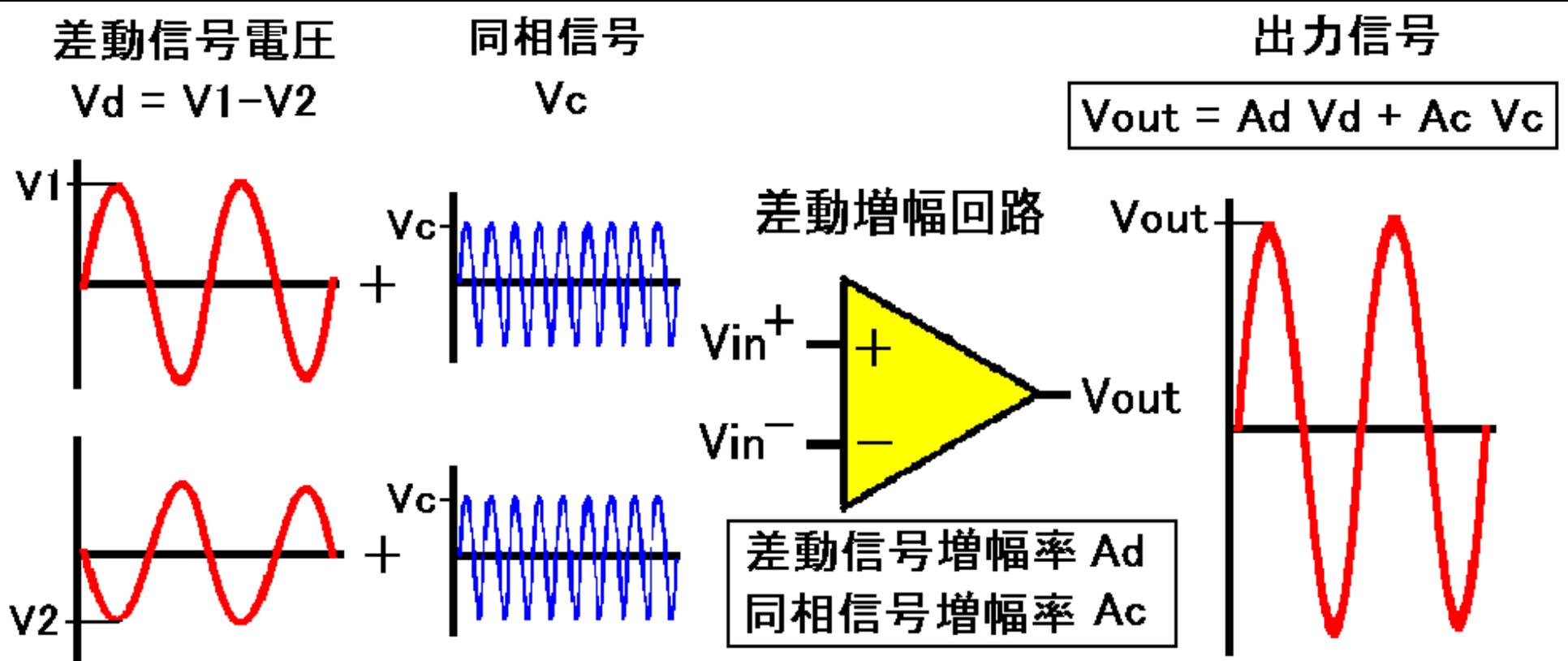
# 同相信号除去比（同相除去率、弁別比）

## CMRR（Common Mode Rejection Ratio）

差動増幅器の性能を評価する指標。

差動成分の増幅率を  $A_d$ 、同相成分の増幅率を  $A_c$  とすると、

同相信号除去比（弁別比）  $CMRR = A_d / A_c$



差動信号増幅率  $A_d$     同相信号増幅率  $A_c$

入力電圧の差動成分を  $V_d$ 、同相成分を  $V_c$ 、

出力電圧を  $V_{out}$  とすると、  $V_{out} = A_d V_d + A_c V_c$

$CMRR (= A_d/A_c)$  が大きいほど、良い差動増幅器である。

( $CMRR$  は、同相ノイズを抑制する能力を示す。)

標準的な差動増幅オペアンプの  $CMRR$  は、10000 (80 dB)

程度。(  $A_d$  が 30 (30 dB)、 $A_c$  が 0.003 (-50 dB) )

差動増幅回路中には、2つの同じ増幅器が含まれているが、

電子素子の性能にはばらつきがあり、全く同じ増幅率のもの

は作れない。出来上がったオペアンプ ICで、 $CMRR$  が高い

ものが高価な商品となり、低いものが安く売られている。

**デシベル dB : ゲイン ( gain G ) の単位**

**電力など、マイナスの値を取らない物理量の場合、**

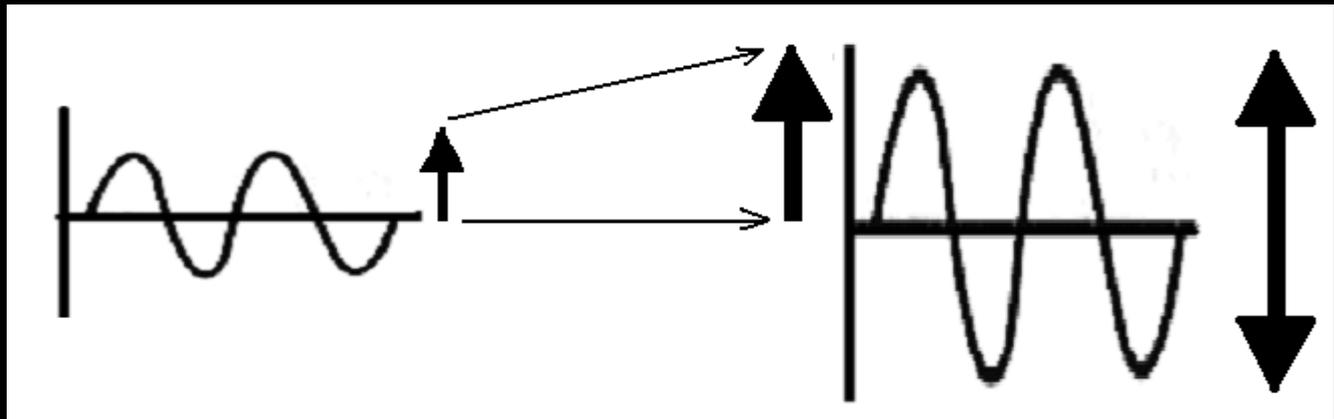
$$G = 10 \log_{10}(\text{出力} / \text{入力})$$

( G の10分の1の値が、増幅度の対数(ゲイン) )

**電圧や電流など、マイナスの値もある物理量の場合、**

$$G = 20 \log_{10}(\text{出力} / \text{入力})$$

マイナス方向にもゲインが広がるので、2倍にする。



# 差動増幅器の特徴

1. 反対位相信号を増幅して、同位相信号(ノイズ)を抑制できる。
2. 2点間の電位差を増幅できる(心電図や脳波等)。
3. 電源電圧の変動(ドリフト)に対して安定である。
4. 直流バイアスを伴う信号の、交流信号だけを増幅できる。

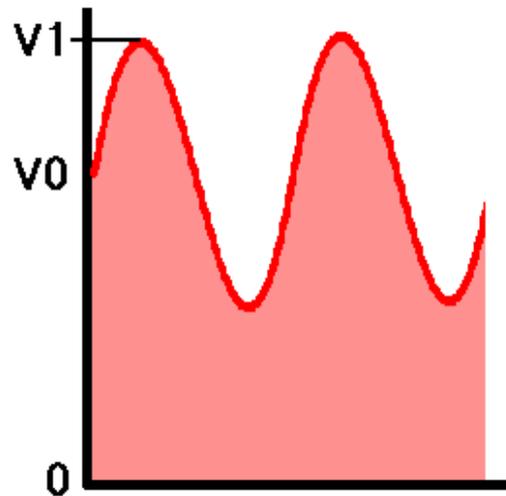
多くの生体信号は、脈流電圧信号である。  
(直流電圧成分を、**バイアス電圧**という。)

測定したい信号は、交流成分だけ。

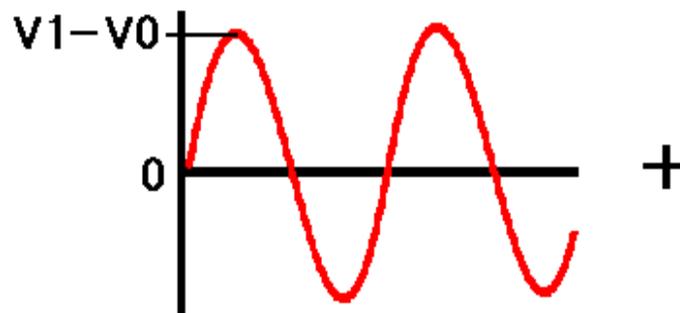
**差動増幅回路**を使うと、2つの電極から得る電圧信号の**バイアス成分が相殺**されて、**交流成分だけを増幅**できる。

bias【名】先入観、偏見、〔電気〕偏倚(へんい)、〔統計〕偏り

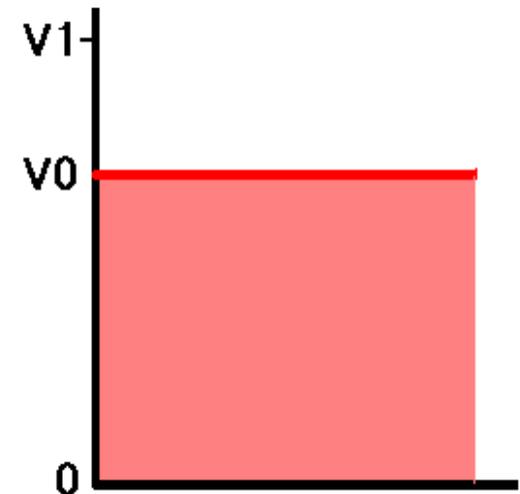
脈流電圧信号



交流電圧成分



直流電圧成分  
(バイアス電圧)



# 電極の分極電圧

体表に電極を付ける場合、ペースト(電極のり)を塗る。  
ペーストは、電子を通す必要があり**電解液**(主成分は **NaCl**)  
が入っている。

測定装置から電極に電流が多く流れると、金属電極から  
ペースト内に電子が流れる。

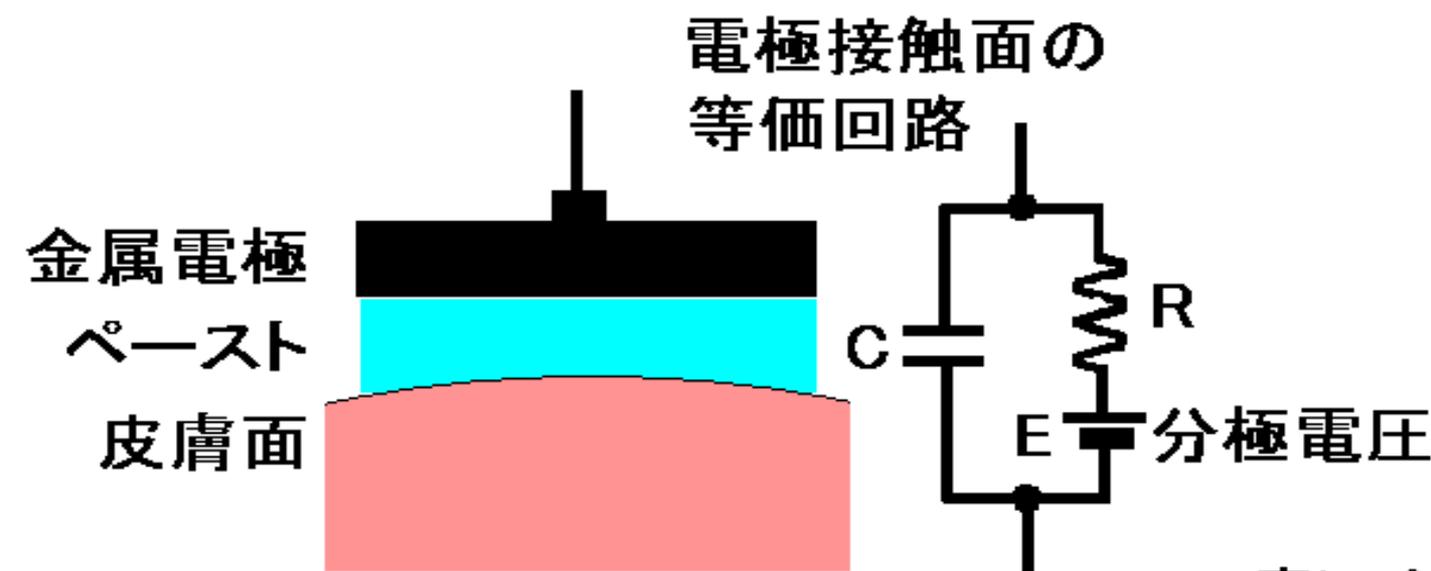
ペーストは電気抵抗(**電極インピーダンス**)  $R$  を持つので  
電圧が発生する。

また、電極自体に**イオン化傾向**の異なる部位があると  
(一部分が錆びているなど)、ペーストを介して電極の  
局所間で電圧が発生する。

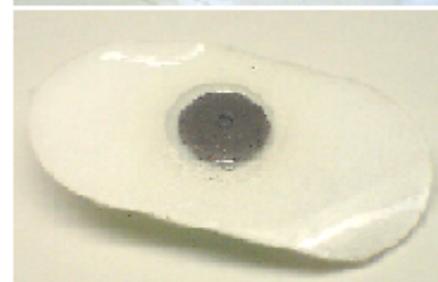
これらの**電極接触面に生じる電圧を、分極電圧**という。

接触皮膚面と金属電極の間の電解質に、電子(電荷)がたまるので、静電容量(コンデンサ)と等価の状態にもなり、CR結合回路のように、入力信号が変動すると検出電圧の変動が生じる。

電極接触面の抵抗  $R$ 、静電容量  $C$ 、分極電圧  $E$  は、測定値を不正確にするので、小さいほうが望ましい。



心電図用の電極



裏にペーストが付いている

電極接触面の、抵抗値(電極インピーダンス)を下げるには、

ペーストを厚く塗らない。

ペーストが厚いとペーストの厚さが呼吸運動で変動する  
不都合も生じ、ドリフトノイズが増加する。

電極接触面の、静電容量を下げるためには、

面積の小さい電極を使う。被検者の汗を良く拭き取る。

接触面の汗が多いと、皮膚面側のコンデンサ電極に  
相当する面積が大きくなる。

電極接触面の、分極電圧を下げるためには、

錆びた電極を使わない。

錆びにくい、イオン化傾向の小さい金属の電極を使う。

銀、水銀、白金、金 など。

**Ag-AgCl**（銀電極の表面に塩化銀の膜が形成されたもの）

（古い銀電極はペーストのClで表面に塩化銀の膜が付く）

は、ペースト内のClとはイオン交換しないので、理想的な

電極として、**不分極電極** と呼ばれる。

生理的食塩水に入れて保存する。塩化銀の膜が維持される。

（わざと古くする処理なので、**Aging** という。）

電極接触面の、分極電圧を下げるためには、  
できるだけ電極に電流が流れない装置を使う。  
(入カインピーダンスの高い増幅器を使う。)

トランジスタを使用した増幅器は、入力端子に電流が流れる  
ので、入カインピーダンスが低く、生体計測の前増幅回路  
には使わない。

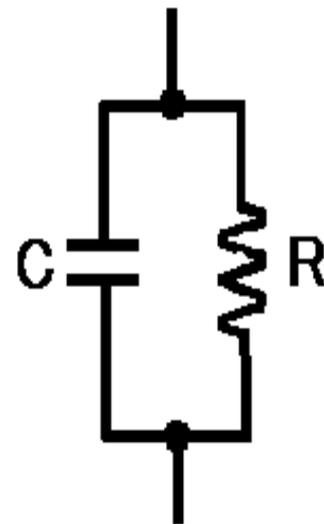
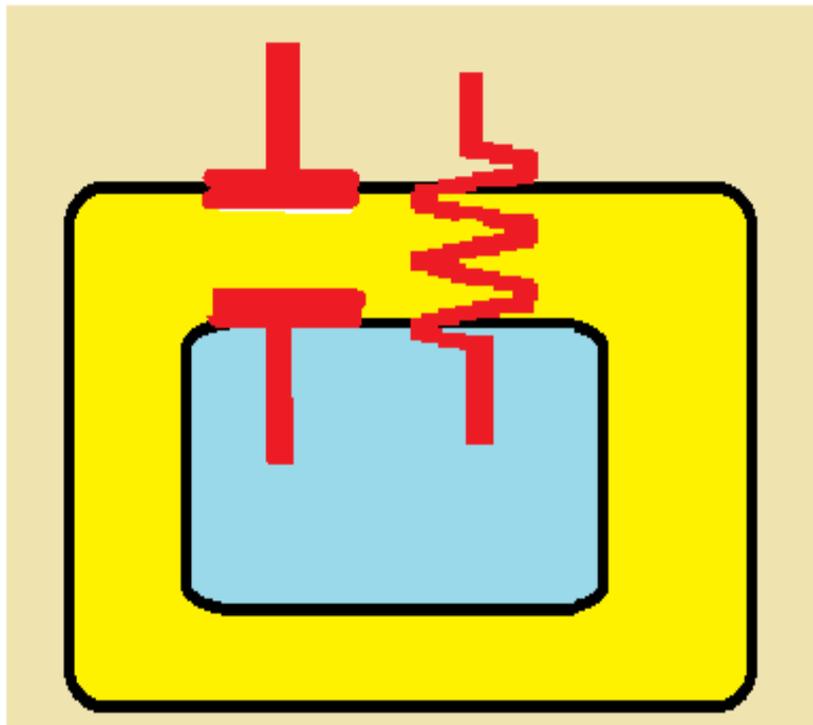
電界効果トランジスタ(FET)、真空管を使用した増幅器は、  
入カインピーダンスが高いため、分極電圧を抑制できる。

細胞膜の電氣的物性を近似した回路はどれか。

1. キャパシタとインダクタの並列接続
2. 抵抗とインダクタの直列接続
3. 抵抗とインダクタの並列接続
4. 抵抗とキャパシタの直列接続
5. 抵抗とキャパシタの並列接続

細胞膜の主成分は脂質で、絶縁体の箇所を含む。  
それが細胞内外の電解質を含む導体の液体に挟まれるので、電氣的にコンデンサ(キャパシタ)と等価となる。  
細胞膜の一部は、細胞内外の液体が出入りするので電氣的には抵抗と等価となる。  
従って、細胞膜は、コンデンサと抵抗の並列回路と等価。

細胞外液(電解液)

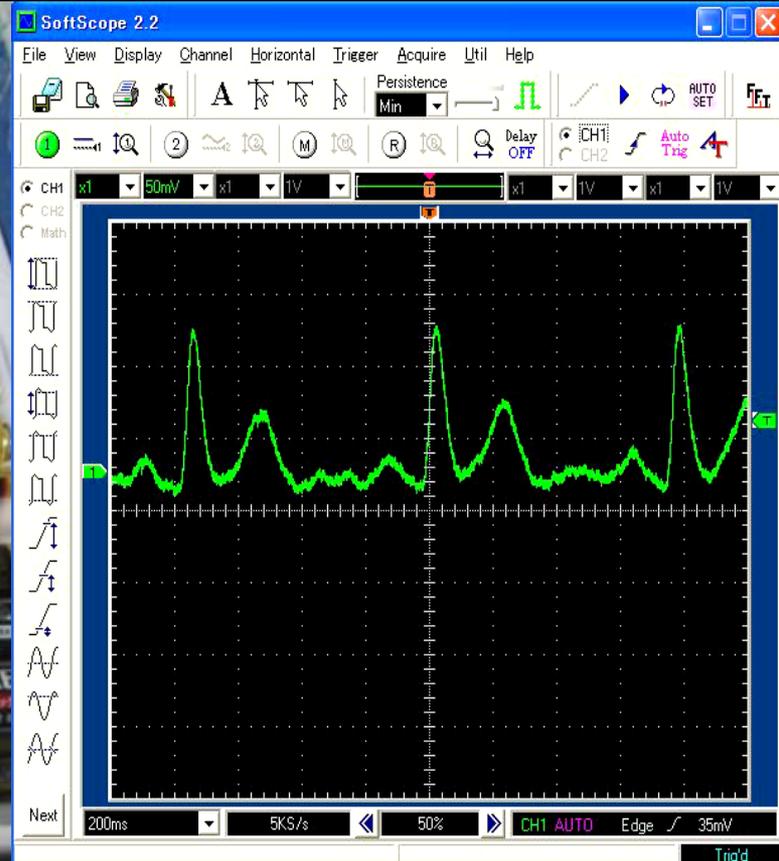
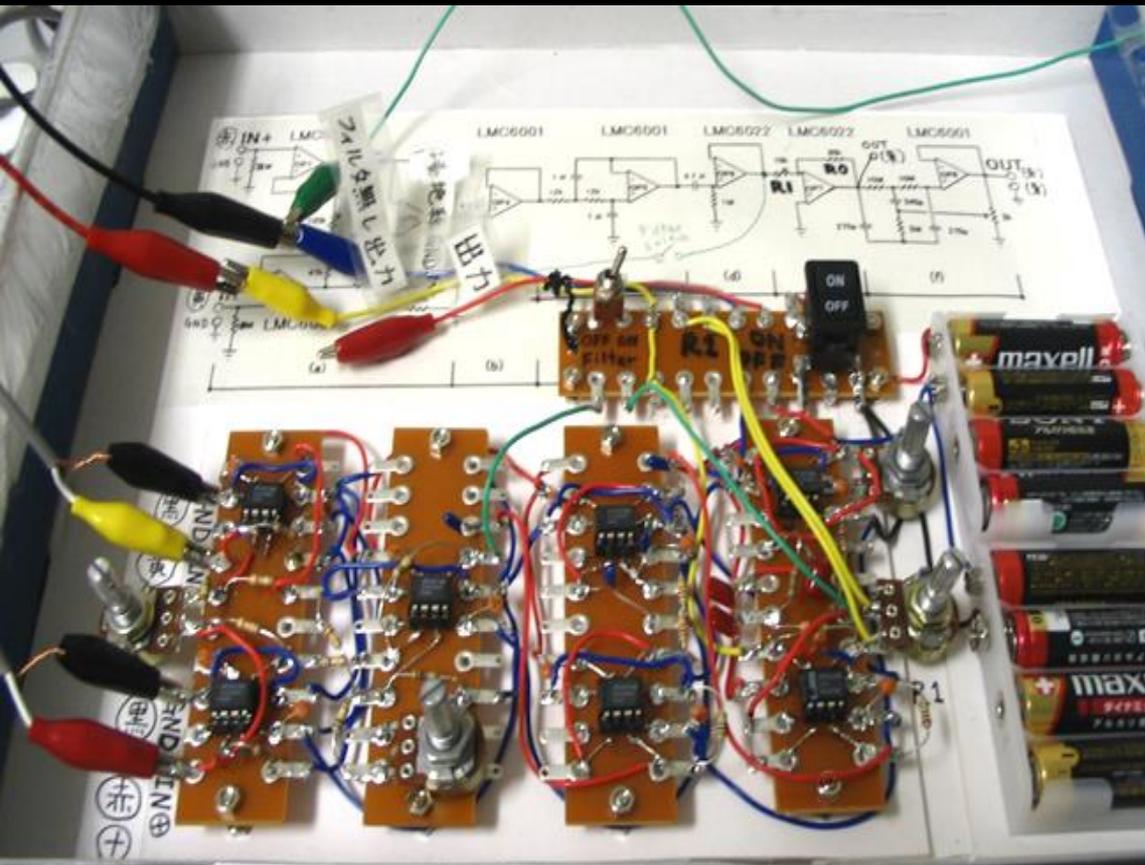


# 心電計の実験 ECG ( Electro Cardiogram )

心電計を用いた心電図測定を行う。

差動増幅回路、雑音を抑制する回路の動作原理、

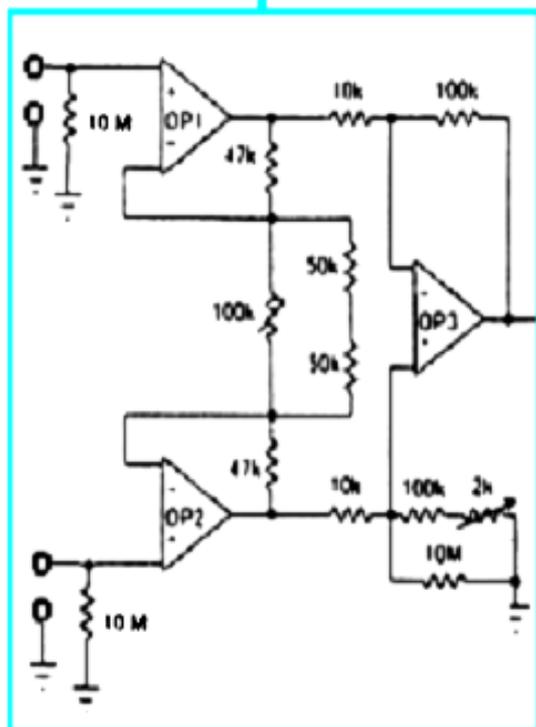
デジタル オシロスコープ の特徴を理解する。



# 心電計 回路図 各回路ブロックの働き

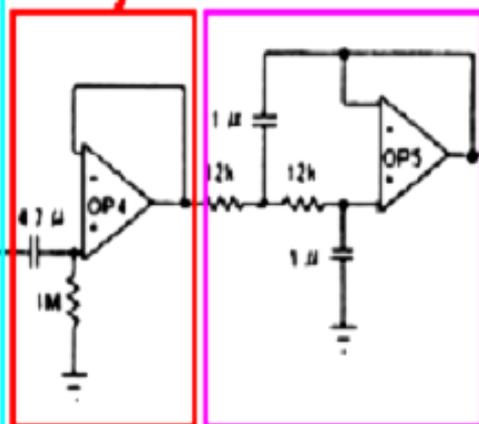
## 差動増幅回路

同相成分(雑音)を抑制し  
逆相成分(信号)を増幅



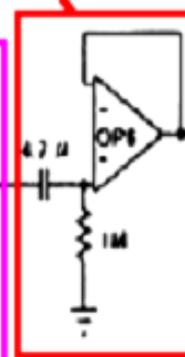
## 低周波フィルタ

ドリフト 雑音など  
低周波雑音を抑制



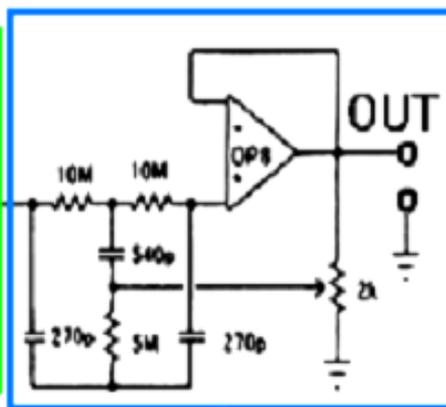
## 高周波フィルタ

Hum、筋電図など  
高周波雑音を抑制



## 負帰還増幅回路 (反転増幅回路)

信号の電圧を増幅



## 帯域遮断フィルタ

商用交流雑音  
(Hum)を抑制

生体電気現象を計測する装置として適切なのはどれか。

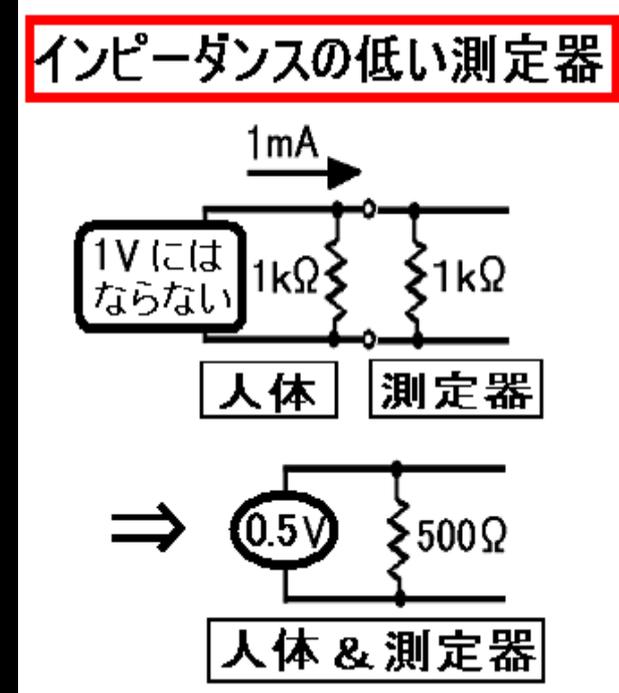
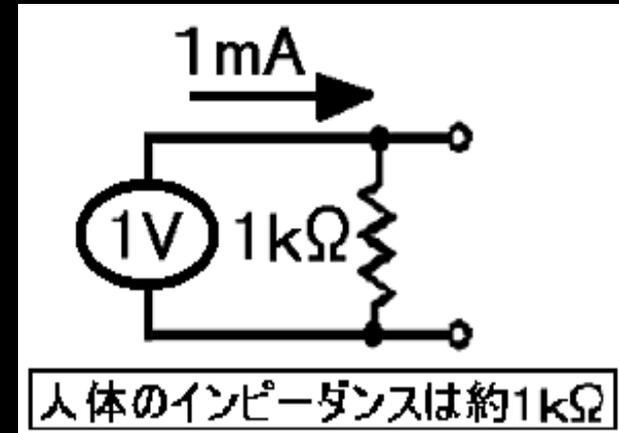
- a 入力インピーダンスが大きい。
- b 電極インピーダンスが小さい。
- c 電極分極電圧が大きい。
- d 入力電流が大きい。
- e 同相信号除去比が大きい。

- 1. a, b, c
- 2. a, b, e
- 3. a, d, e
- 4. b, c, d
- 5. c, d, e

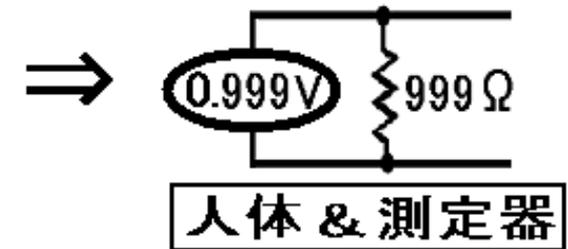
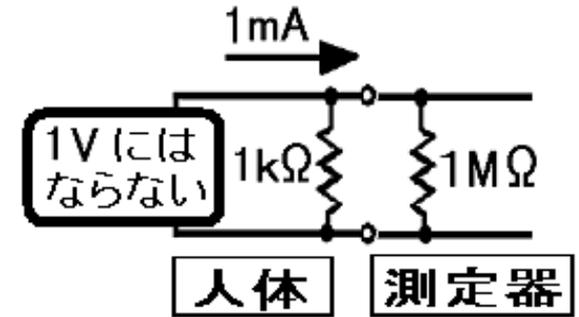
# 測定装置のインピーダンス(入力インピーダンス)を、人体(電極間)のインピーダンスより高くする理由。

人体の電気抵抗(インピーダンス)は、約 $1\text{k}\Omega$ 。例として、体内に $1\text{V}$ の電圧を発生する部位があるとすると、人体に装着した電極間に流れる電流は、オームの法則で  $1/1000 = 1\text{mA}$ 。

測定器が直接知ることができる電気情報は、**電流(電子の流れ)**。電圧は間接的な情報。測定器のインピーダンス(入力インピーダンス)が $1\text{k}\Omega$ の場合には、人体と装置の合成抵抗は $500\Omega$ になる。そこに $1\text{mA}$ の電流が流入するので、測定器は $0.5\text{V}$ の電圧と測定する。真の電圧より低くなり、正しい測定ができない。(インピーダンス不整合による電圧降下。)



## インピーダンスの高い測定器



インピーダンスの高い  $1\text{M}\Omega$  の測定器では、  
人体と装置の合成抵抗は  $999\Omega$  になる。  
( $1\text{k}\Omega$  と  $1\text{M}\Omega$  の並列抵抗)

そこに  $1\text{mA}$  の電流が流入すると、  
測定器は  $0.999\text{V}$  の電圧を測定する。

測定器のインピーダンスが高いほど  
正確な生体内電圧を測定できる。

インピーダンスの高い測定器

= 装置の入力電極に電流が流入しにくい装置

人体に装着する電極の電気抵抗(インピーダンス)は低いほうが良い。

微弱な電圧を測定する装置の入力インピーダンスは高いほうが  
正確な測定値を得られる。(FETや真空管を用いた装置。)

## 226 ☆

ある差動増幅器において差動入力信号が 1 mV の時、出力電圧は 1 V であり、同相入力信号が 1 V の時、出力電圧は 10 mV であった。この差動増幅器の CMRR (同相弁別比) はどれか。

1. 40 dB   2. 60 dB   3. 80 dB   4. 100 dB   5. 120 dB

差動成分増幅率  $A_d = 1/0.001 = 1000$

同相成分増幅率  $A_c = 0.01/1 = 0.01$

弁別比  $CMRR = A_d/A_c = 1000/0.01 = 100000$  倍

dB で表現すると、 $20 \log 100000 = 20 \times 5 = 100$  dB

解答 4

生体電気計測用増幅器で正しいのはどれか。

1. 入力インピーダンスは電極インピーダンスと等しくする。
2. 差動増幅器の同相弁別比は小さい方がよい。
3. 増幅帯域は信号帯域の10倍以上必要である。
4. 出力側でのSN比は大きい方がよい。
5. 直流電源のリップルは大きい方がよい。 ■ 4

# 生体信号の測定装置に必要な 周波数帯域、増幅率、入力インピーダンス

生体信号の周波数帯域と、増幅器の周波数帯域を揃えることが、ノイズを除去するために重要。

増幅率と入力インピーダンスは大きいほど良い測定器。

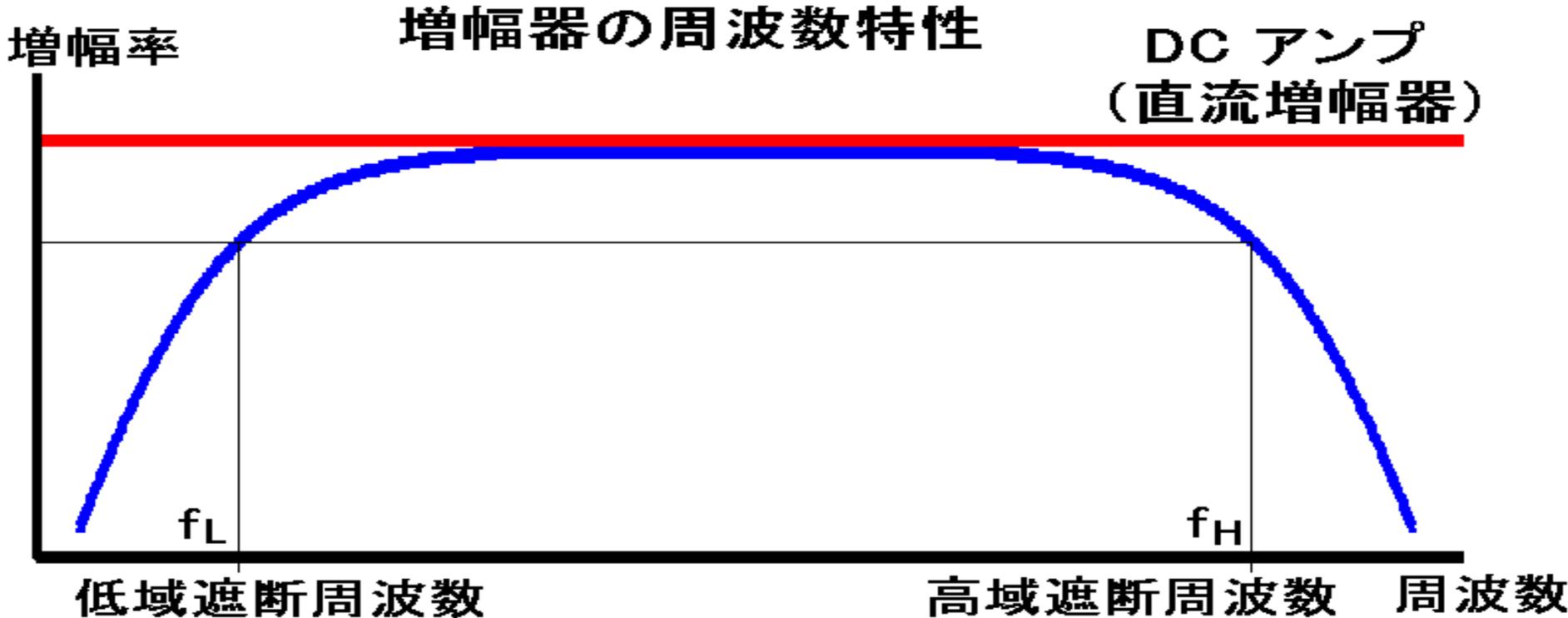
	周波数 (Hz)	測定器の増幅率	入力インピーダンス
心電図	0.05～200	80dB (1万倍) 以上	5 M $\Omega$ 以上
脳波	0.5～60	120dB (100万倍) 以上	5 M $\Omega$ 以上
筋電図	5～2000	120dB (100万倍) 以上	20 M $\Omega$ 以上

入力生体信号の周波数帯域と、増幅器の周波数帯域を揃えることが、ノイズを除去するために重要。

( いらぬ信号を増幅しないようにする。 )

オペアンプは、**DCアンプ** ( 直流増幅器 ) ( 直流 ( DC ; 周波数 0 ) からかなりの高周波まで、全ての信号を同じゲインで増幅する ) を利用。

**低域および高域遮断周波数フィルタ** を、CR結合回路などで付加する。



**S/N 比**    **信号対雑音比**    **Signal / Noise ratio**

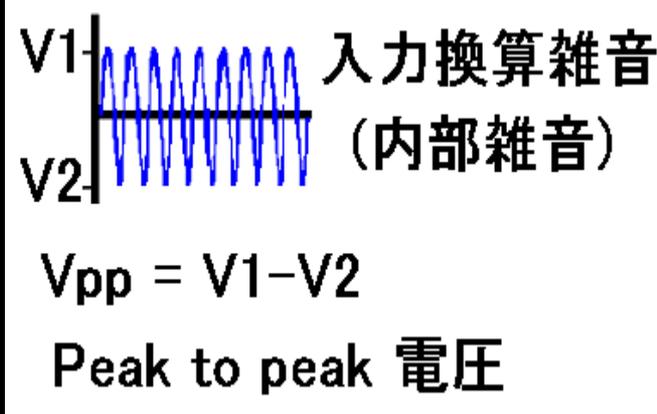
入力信号、または出力信号における  
**測定したい信号 (Signal) と、ノイズ (Noise) の比率。**  
単位は dB。 S/N 比 は、大きいほうが望ましい。

**入力換算雑音 (内部雑音、フリッカー雑音)**

測定装置の入力端子間を、抵抗器でつないで、  
入力信号がない状態が出る雑音信号の大きさ。  
測定器自体が発生するノイズ (**内部雑音**) の大きさ。  
Peak to peak 電圧で表示。 小さいほうが望ましい。

# 生体信号の測定装置に必要な入力換算雑音の限度

	信号電圧	入力換算雑音
心電図	1~5mV	10 $\mu$ V 以下
脳波	1~500 $\mu$ V	3 $\mu$ V 以下
筋電図	0.01~10mV	5 $\mu$ V 以下



入力換算雑音が10  $\mu$ V の増幅器で、  
1mV の入力信号を測定すると、S/N比は

$$\begin{aligned} \text{S/N 比} &= 20 \log_{10} (\text{Signal} / \text{Noise}) \\ &= 20 \log_{10} (1\text{mV} / 10 \mu\text{V}) \\ &= 20 \log_{10} (10^2) \\ &= 40 \text{ dB} \end{aligned}$$