

## 核医学機器工学概論

令和6年度の本講義は、Web講義です。  
ホームページのスライドを見て自習して下さい。  
Windowsプログラムの起動が可能な人は  
試して理解を深めてください。  
出席票を毎回提出して下さい。  
(講義後1週間以内に。)  
試験は、11月18日 10:30 に、C304 で実施。

## 核医学機器工学概論

断層画像 CT (Computed Tomography)  
を得る方法  
核医学断層画像のPETやSPECTも同じ方法

1. フィルタ重畳逆投影法  
FBP (Filtered Back Projection)
2. 逐次近似再構成法 Iterative Reconstruction  
MLEM (Maximum Likelihood Expectation Maximization)  
OSEM (Ordered Subsets Expectation Maximization)
3. ディープラーニング法 Deep learning



## CTの世代分類

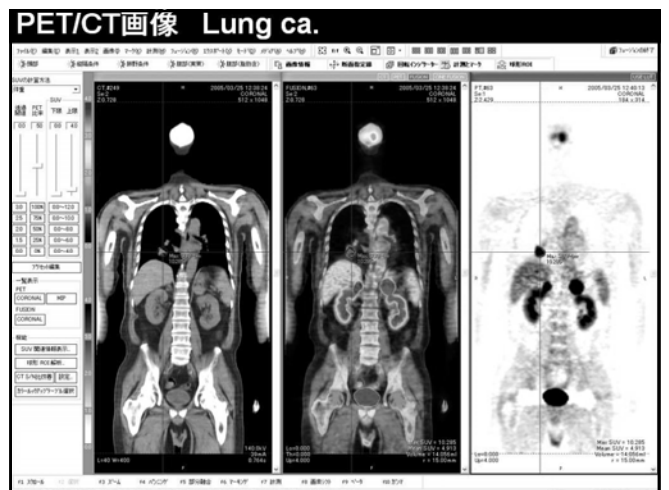
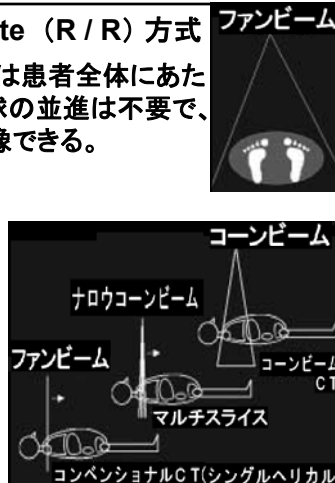
第1世代 Translate / Rotate (T / R) 方式  
検出器は1個。X線は細く(ペンシルビーム)、  
X線管球が並進(translate)し、角度を変えて  
(回転 rotate)撮影。初期のCT。

第2世代 Translate / Rotate (T / R) 方式  
検出器は10~20個。X線は10度程の広がり  
のナローファンビームが並進(translate)し、  
角度を変え(回転 rotate)撮影。回転角が  
ファン角ごとに減り、第1世代より高速化。



第3世代 Rotate / Rotate (R / R) 方式  
検出器は500個以上。X線は患者全体にあたる  
ワイドファンビーム。管球の並進は不要で、  
管球と検出器の回転で撮像できる。

現在のCTの主流であり、  
体軸方向へのビームを広  
げて、ワイドコーンビーム  
によるマルチスライス、  
およびヘリカルスキャンで、  
高速、広範囲なCT撮影が  
可能となった。



# フィルタ重畳逆投影法 FBP (Filtered Back Projection)

## 最も基本的な断層画像再構成法

① 断層像  $g$  の 4 方向からの投影データ (projection) を求める。

例として、5x5画素の断層像  $g$  を得るために45度おきに4方向から透視(投影)データを収集したとする。断層像  $g$  の正解は、中心に画素値1があるだけで周囲の画素値は全て0とする。

断層像  $g$  を4方向から投影して得るデータを求めると、左図①のようにプロジェクションデータ1から4が収集される。

② 単純重ね合わせ Simple Back Projection

収集されたプロジェクションデータから断層像  $g$  を得るために、まず単純に4方向から得た投影データを左図②のように5x5画素の行列内に逆投影する。断層像は、中心に最大の画素値を得るが、その周囲にも0ではない画素値が分布する。これが単純重ね合わせ (Simple Back Projection) で、本当は中心に画素値1があるだけなのに、周囲にも画素値が発生して点像がぼけている。

このCTシミュレーションを、もう少し厳密に、256x256画素の画像で行うプログラムを作成してみた。

画像中心の1画素だけ値が1で、他は全て0の256x256画素の画像を作成し、これを画像  $g$  とする。その像を1度毎に180度方向から投影した投影像  $P\theta$  を作成する。左図では5度毎の  $P\theta$  を表示。

180枚の投影像  $P\theta$  から単純重ね合わせ像を作ると、画像中心の1画素が最大値を示し、その近傍に中心からの距離  $r$  に反比例する値が示される。つまり1点の画素値が  $1/r$  の関数に広がっている。この単純重ね合わせ像を画像  $l$  とする。

$1/r$  とは、1点の画素を、画素からの距離  $r$  に反比例した値の分布に変換する関数と解釈すると画像  $g$  に関数  $1/r$  を畳んだ像が  $l$  である。式で表現すると  $l = g * (1/r)$  となる。

(\* は畳込み演算 (convolution))

$l, g, 1/r$  のフーリエ変換を  $L, G, F(1/r)$  と表現すると、畳み込みの定理より  $L = G \cdot F(1/r)$  となる。

ここで  $1/r$  のフーリエ変換を計算すると、 $F(1/r) = 1/fr$  となる。(  $f$  はフーリエ空間での周波数を表す。 )

したがって、 $L = G/fr$ 、 $G = L \cdot fr$

フーリエ空間 (周波数空間) で、画像  $l$  のフーリエ変換像  $L$  にフィルタ  $fr$  をかけると、画像  $g$  のフーリエ変換  $G$  が得られる。この周波数空間での計算は、以下の式を用いて実空間で済ませられる。

$g = l * h$  (\* は畳込み演算) ( $h$  は  $fr$  の逆フーリエ変換)

商用交流雑音を伴う心電図の1次元フーリエ変換

フーリエ変換 Fourier transform

実空間の曲線や画像データなどを周波数空間のデータに変換する演算。実空間データに含まれる  $\cos$  成分と  $\sin$  成分を各周波数ごとに算出する。オイラーの公式  $\exp(j\theta) = \cos\theta + j\sin\theta$  を用いて、以下の式で示される。曲線  $g(t)$  の周波数分布を  $G(f)$  とすると、 $G(f) = \int g(t) \exp(-j \cdot 2\pi f t) dt$  ( $j$  は虚数単位)

逆フーリエ変換も類似した式で表される。 $g(t) = \int G(f) \exp(j \cdot 2\pi f t) df$

高速フーリエ変換 FFT Fast Fourier Transform

フーリエ変換、逆フーリエを行う際に使用されるアルゴリズム、プログラム。フーリエ変換の公式は、波形データが連続曲線と想定して  $\exp(-j \cdot 2\pi f t)$  という三角関数のオイラー式表記をしているが、実際に扱う数値はデジタルデータであり離散的なので、 $\exp(-j \cdot 2\pi f t)$  の項を  $W^k$  のように変形して高速に計算できる巧みなアルゴリズムである。

工学の領域では  $i$  は電流密度を表す場合が多いので、虚数単位は  $j$  で表す。

フーリエ変換とは、全ての関数は  $\sin$  波と  $\cos$  波の級数で表現できることを利用し、実空間の曲線や画像などのデータを周波数空間での周波数分布関数に変換する算術。フーリエ変換では、実空間関数での畳込み演算が、周波数分布関数で掛け算に変わり、計算が楽になる利点がある。

$1/r$  のフーリエ変換が  $1/fr$  になる理由

2次元フーリエ変換の公式の極座標表現を用いると ( $r$  と  $\theta$  は実空間の原点からの距離と偏角、 $fr$  は周波数空間の原点からの距離) 関数  $g(r)$  のフーリエ変換は  $\iint g(r) \exp(-j \cdot 2\pi r fr) r dr d\theta$  (ヤコビアンに注意)  $g(r) = 1/r$  とすると  $\iint (1/r) \exp(-j \cdot 2\pi r fr) r dr d\theta = \iint \exp(-j \cdot 2\pi r fr) dr d\theta = 1/fr$

周波数空間を理解することは難しい印象を持つが、周波数空間や周波数分布を表現しているものは一般にも結構ある。

たとえば楽譜は、音楽の周波数分布、曲のフーリエ変換とも解釈できる。五線譜の下側の音符は低音、低周波数成分を表し、上側の音符は高音、高周波数成分を示している。

虹は白色光に含まれる色の周波数分布を示している。雨粒中で屈折しやすい高周波の紫色成分から、屈折しにくい低周波の赤色成分まで、周波数の順序で色が並んでいる。

④ Convolution 畳込み

スリットを通したビーム①がフィルタ上で②のような  $h(x)$  の濃度分布の像をうつるとする。

$x$  軸に沿って明るさが  $g(x)$  である線状の被写体  $g(x)$  を、間隔  $d$  のスリットを通してフィルムに写す。

フィルムの  $x_1$  の位置での濃度は

$$l(x_1) = g(x_1)h(x_1) + g(x_1-d)h(x_1-d) + g(x_1+d)h(x_1+d) + g(x_1-2d)h(x_1-2d) + g(x_1+2d)h(x_1+2d) + \dots$$

任意の座標  $x_1$  における  $l(x_1)$  は

$$l(x_1) = g(x_1)h(x_1) + g(x_1-d)h(x_1-d) + g(x_1+d)h(x_1+d) + \dots + g(x_1-nd)h(x_1-nd) + \dots + g(x_1+nd)h(x_1+nd) + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x_1)h(x_1 - nd)$$

$l(x) = g(x) * h(x)$

$$l(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(n) h(x-n) dn$$
 (Convolution 積分) (たたみ込み積分)  
 これを  $l(x) = g(x) * h(x)$  と表す。  
 $h(x)$  を convolution 関数 といふ。  
 $g(x)$  が  $h(x)$  のために  $l(x)$  にボケてしまふことを意味する。

---

たたみ込みの定理 実空間の関数の畳込みは周波数空間では掛算になる  
 $h(x-n)$  の Fourier 変換を  $H(f)$  とすると  
 $h(x-n) = \int H(f) e^{j(2\pi f(x-n))} df$  (逆 Fourier 変換)  
 これを  $l(x) = \int g(n) h(x-n) dn$  に代入すると  

$$l(x) = \int g(n) \int H(f) e^{j(2\pi f x)} e^{-j(2\pi f n)} df dn$$
  

$$= \int \int g(n) e^{-j(2\pi f n)} dn H(f) e^{j(2\pi f x)} df$$
  

$$= \int G(f) H(f) e^{j(2\pi f x)} df$$
  
 $l(x)$  の Fourier 変換を  $L(f)$  とすると  

$$L(f) = \int L(f) e^{j(2\pi f x)} df, \text{よって } L(f) = G(f) H(f)$$

**周波数空間のRampフィルタ H** 周波数空間でのフィルタ  $fr$  とは、どのような形をしているのか。1次元周波数空間の縦軸の周波数成分が  $fr$  の値を持つフィルタであるが、横軸が周波数軸すなわち  $fr$  である。つまり周波数空間で、正比例のような形状になる。

周波数にはマイナスの値は無いが、高速フーリエ変換 (FFT) のアルゴリズムの都合で見かけ上、マイナスの周波数データが存在する。縦軸の周波数成分にはマイナスは無いので、周波数がマイナス側の成分は絶対値となり、原点を中心に左右対称な絶対値  $|fr|$  の関数として表現される。さらにサンプリング定理によって、ナイキスト周波数 (0.5 cycle / pixel) 以上の高周波成分はノイズなので除去する。よって、このフィルタは上図のようになり、これをRampフィルタという。

**ナイキスト周波数(Nyquist frequency)**  
 医用画像はデジタル化して保存される。デジタル画像に含まれる最高周波数をナイキスト周波数という。ナイキスト周波数の波長は、その画像データの2画素長である。つまり1画素 (pixel) の長さは、最高周波数の波長の半分 (0.5 cycle/pixel) である。

ナイキスト周波数の理論は、アナログデータをデジタル変換 (AD変換) する際のサンプリング間隔を考えると理解しやすい。

1波長を8分割 (信号の8倍の周波数でサンプリング) した場合は、かなりアナログ波形の形状を保ったサンプリング (標本化) が出来ている。では、1波長を2分割したサンプリング (信号の2倍の周波数でサンプリング) ではアナログデータの波長と振幅の値は、ぎりぎりまでデジタルデータに記録されている。ところが、アナログデータの半波長を少しでも超えたサンプリング (信号の周波数の2倍より低い周波数でサンプリング) では、アナログデータの波長も振幅もわからない標本化が行われている。つまり、データの最高周波数 (ナイキスト周波数) をデジタルデータに記録 (標本化) するためには、その2倍の周波数で標本化する必要がある。

**実空間 Ramp フィルタ h** 周波数空間の Ramp フィルタ  $H$  と表現する。 $H$  を 1 次元逆フーリエ変換すると、実空間での Ramp フィルタ  $h$  が左図のように算出される。

このフィルタの積分値は1である点が再構成画像の定量化を保証する。

**画像 g** 画像中心の1画素だけ値が1で、他は全て0の256x256画素の画像  $g$  を1度毎に180度方向から透過投影した投影像  $P\theta$  を作成する。次に全ての  $P\theta$  に Ramp フィルタ  $h$  を畳込む (式で表すと  $P\theta * h$ ) (上図で青色の部位はマイナスの画素値) (全ての  $P\theta * h$  の断面が  $h$  と同じ形状をしている)。さらに、全ての  $P\theta * h$  を重ね合わせて画像  $I$  を算出する。式で表すと  $I = \int (P\theta * h) d\theta$

**画像 I** 画像  $I$  は中心の1画素だけ値が1で、周囲は殆ど0に近い値を示し、ほぼ画像  $g$  に戻っている。  
 $P\theta$  の単純重ね合わせでは、画像中心の1画素が最大値を示し、その近傍に中心からの距離  $r$  に反比例する  $1/r$  の関数の画素値が広がっていたが、Ramp フィルタ  $h$  を畳込むと、その広がりが補正されて元の画像が再現される。この Ramp フィルタ  $h$  の機能によって断層画像を算出することができる。

**③ 実空間フィルタ畳込み処理 projection \* h**

単純重ね合わせでは点が点像に戻らない。それを補正するため投影データにフィルタ  $h$  をかける。ここでは簡単に要素数3個の行列  $(-1, 3, -1)$  を  $h$  とする。投影データの値に行列  $h$  をかける。このようにスカラー値に行列を畳込むように掛ける演算を畳込み、重ね (convolution) という。行列  $h$  を畳まれた各プロジェクションを左図③に示す。これらを4方向から5x5画素の行列内に逆投影する。これをフィルタ重ね逆投影 (FBP: Filtered Back Projection) という。

**④ フィルタ重ね合わせ Filtered Back Projection**

行列  $h$  を畳まれた4方向の投影データ (演算記号  $*$  は畳込みを表す) を、左図④のように5x5画素の行列内に逆投影すると、単純重ね合わせよりも、最大値を示す中心画素の近傍の画素値が低く抑えられ明瞭な点像が得られ、本来の断層像  $g$  に近い画像になる。つまりフィルタ重ね逆投影法は、点像をぼかさずに点像に戻す事ができるので、横方向からの投影データから正しい断層画像を算出できる。

**Backprojection像の算出法**

projection 1 ~ 4  $h$  の back projection の行列加算を行う。

Filtered Back Projection  $g$

CT装置が収集した各々の角度における投影画像 (Pθ) から断層画像を再構成する方法を考える。

スライス j でのサイノグラムが求められたとする。サイノグラムの各スライスの 1 次元配列は、各々の角度から収集された投影データである。

サイノグラムの各スライスの 1 次元配列から、各々の角度に傾いた 2 次元投影画像 Pθ を作成する。2 次元投影画像 Pθ は、サイノグラムの各 θ の 1 次元データを 2 次元に引き伸ばした像である。

Pθ を単純に重ね合わせた画像を I とすると

$$I = \int P_{\theta} d\theta \quad (\text{Simple back projection})$$

画像 I は、回転中心部ほど重ね合わせ回数が多くなり、中心から距離が遠いほど値の低い像になる。

**フィルタ重畳逆投影法 (FBP) で計算された断層画像の画素値は、定量性が保たれている。**

**フィルタ重畳逆投影法 (FBP)**

回転中心からの距離 r に反比例した濃度に補正するフィルタ 1/r を正確な断層像 g に畳み込んだ像が I である。式で表現すると  $I = g * (1/r)$  となる。I、g、1/r のフーリエ変換を L、G、F(1/r) と表現すると、畳み込みの定理より  $L = G \cdot F(1/r)$  となる。ここで  $F(1/r) = 1/fr$  なので  $L = G/fr$ 、 $G = L \cdot fr$  この式を逆フーリエ変換して  $g = I * h$

この式に、 $I = \int P_{\theta} d\theta$  を代入すると、  
 $g = \int P_{\theta} d\theta * h$ 、 $g = \int (P_{\theta} * h) d\theta$   
 (h は θ と独立した関数なので交換可)

$g = \int \bar{P}_{\theta} d\theta \quad (\bar{P}_{\theta} = P_{\theta} * h) \quad \text{FBP の式}$

Pθ に実空間フィルタ h (= fr の逆フーリエ変換) を畳めば、重ね合わせると正確な断層像 g になる。2 次元投影画像 Pθ を算出できる。これを Filtered Back Projection (FBP) という。Ramp フィルタ h を画像再構成フィルタという。

投影像 Pθ を単純重ね合わせた画像 I を 2 次元フーリエ変換し、周波数空間でフィルタ fr を乗算したデータを 2 次元逆フーリエ変換すると、正確な断層画像 g が得られる。

畳み込みの定理を使うと、これらの周波数空間での処理が実空間で簡略化される。

投影像 Pθ にフィルタ h (fr の 1 次元逆フーリエ変換) を畳み込み、それを重ね合わせると正確な断層画像 g が得られる。

**ゴッドフリー・ニューボルド・ハンスフィールド**  
**Godfrey Newbold Hounsfield (1919 - 2004)**

イギリスの電気技術者。1967年、コンピュータを用いたX線断層撮影技術 (CT) の開発により、1979年にノーベル生理学・医学賞をアラン・コーマックとともに受賞した。

彼の名は現在のCT値の単位である Hounsfield Unit (HU) として使用され、この値は -1000 HU を空気、0 HU を水とした吸収率の相対値で定義されている。

Windowsで動くプログラムをホームページにアップロードしました。  
 CT.zip  
 興味のある人は動かして、FBPの画像再構成を確認して下さい。

RAMP関数の動きを確認する PSF.exe  
 PAMP関数の実空間上の逆フーリエ変換データ RealRAMP256.txt  
 CTの畳込み再構成法を確認する CTFBP.exe  
 CTの投影データ CTprojection

Zip解凍ソフト Lhaca で解凍し、プログラムの動作を確認してください。

(解凍ソフトLhacaをインストールして、デスクトップのLhacaのアイコン上へ、解凍したいzipファイルをドロップダウンする。)

**プログラム PSF.exe (Point Spread Function) フォルダ PSF 内のPSF.exe をダブルクリック。**

このテキストウィンドウ内をクリックしてから 1を入力して Simple back projectionを実行。

次にプログラム PSF.exe を終了、再度実行。2を入力して Filtered backprojectionを実行。

選択する再構成フィルタは、(real space filter は) フォルダ PSF 内にある RealRAMP256.txt を選択。

Disp FBP Process? と出たら Enter キーを押す。

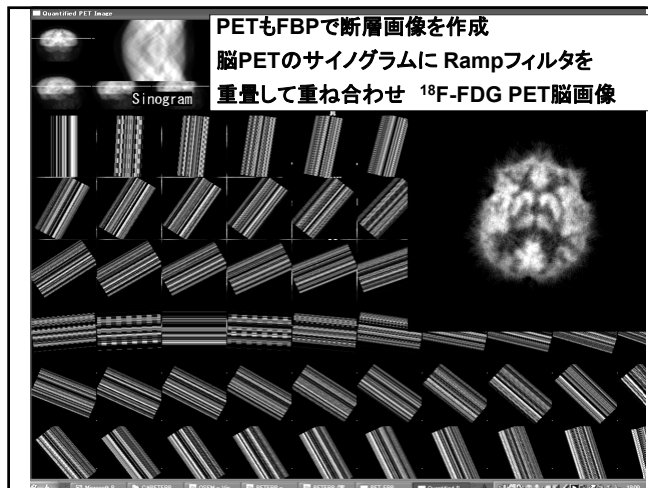
このプログラムの実行は、常にこのテキストウィンドウ内をクリックして (フォーカスをあてて) 行って下さい。

プログラムCTFBP.exe (ソースコードは CTFBP.c)  
フォルダ CT 内のCTFBP.exe をダブルクリック。

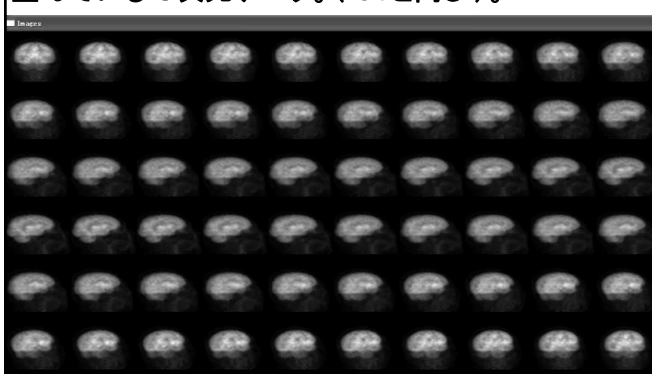
```

CT FBP
CT BackProjection
Load CT Sinogram data
max count = 707071.474638
min count = 0.000000
Select Reconstruction method
1: Simple BackProjection
2: Filtered BackProjection
2
Load Real space Filter
Real space filter =
C:\Users\Kato\Desktop\医用画像機器工学実
OK ? (yes; enter, no; n)
Disp Filtered Pth * Filter
max count = 170934604.548631
min count = -12698206.878418
Disp FBP Process?
(yes; enter, no; n)
    
```

このテキストウィンドウ内を  
クリック。  
選択するプロジェクション  
データは、フォルダ CT 内の  
CTprojection を選択。  
2を入力して  
Filtered back projectioを実行。  
選択するReal space filter は  
フォルダ CT 内の  
RealRAMP256.txtを選択。  
Disp FBP Process? と出たら  
Enterキーを押す。



脳 FDG PET の プロジェクションデータ。  
PETの収集データは各角度から撮像された脳が  
並んでいる 3次元データ。( CTと同じ)。



PET.zip を解凍し、プログラムPETFBP.exe の実行。

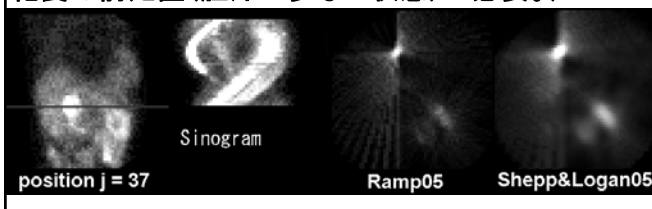
```

PET FBP
Load PET Sinogram data
max count = 472.569855
Disp Projection
select slice = 37
select slice OK ?
Reconstruction slice OK?
(yes; enter, no; n)
Load Real space Filter
Real space filter =
C:\Users\Kato\Desktop\医用画像機器工学
OK ? (yes; enter, no; n)
Select Reconstruction method
1: Simple BackProjection
2: Filtered BackProjection
2
Disp Filtered Pth * Filter
    
```

このテキストウィンドウ内を  
クリックする。  
選択するプロジェクション  
データは、フォルダ PET  
内の PETsinogram を選択。  
Select slice おすすめスライ  
スは、38、39、40あたり。  
2を入力して  
Filtered back projectioを実行。  
選択フィルタは2種類。  
RealRAMP256.txt  
RealSheppLogan256.txt

MIBI 心筋SPECT再構成を 胆嚢のスライスで行うと  
胆嚢内の 99mTc-MIBI 停滞部位の再構成像が  
作成される(99mTc-MIBI は胆汁排泄あり)。

局所的に強いRI分布を示すスライスでは  
フィルタ逆投影再構成像は、放射状アーチファクトが  
強く出ることが確認できる。(99mTc-MIBI検査前は  
絶食の前処置(胆汁が少ない状態)が必要。)



### Shepp & Logan フィルタ、

Real space Ramp filter

Filtered Back Projection

Rampフィルタは理論的には正確な再構成フィルタで、X線CTやPETなど投影データの画質が良好な場合は適切な断層画像を算出する。しかしSPECTなど投影データのカウントが低く統計雑音が多い場合は、高周波成分のS/N比の悪さが影響して、左図の心筋SPECTのように放射状アーチファクトが目立つ断層画像を再構成する。

Real Space Shepp & Logan

FBP image with Shepp&Logan filter

そこで、SPECT画像再構成には、S/N比の良くない高周波成分を抑制する効果を加えたShepp & Loganフィルタという画像再構成フィルタが用いられる。

Frequency space Shepp & Logan

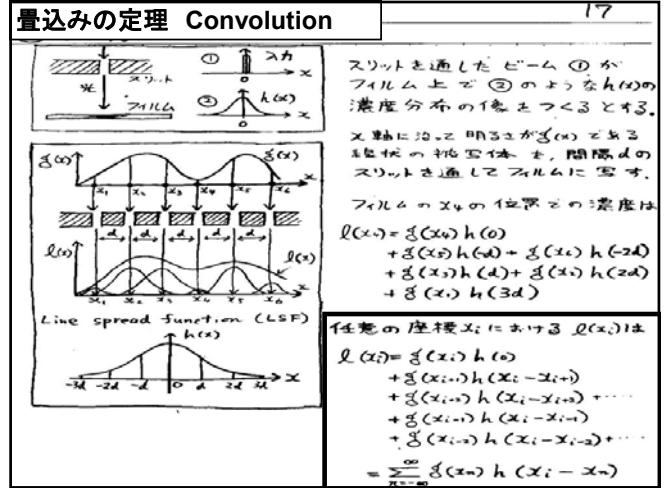
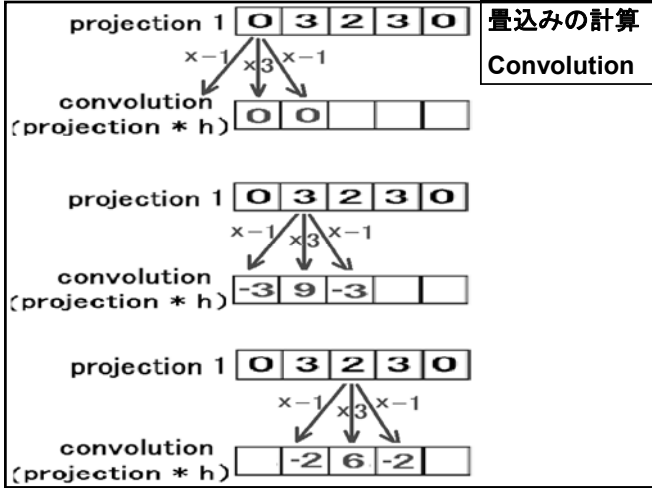
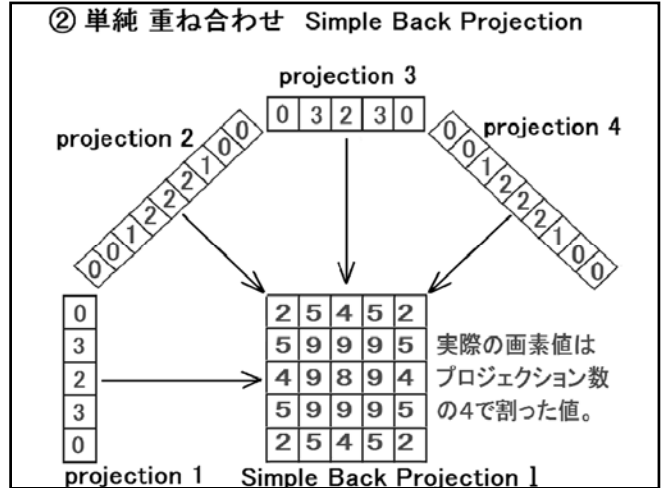
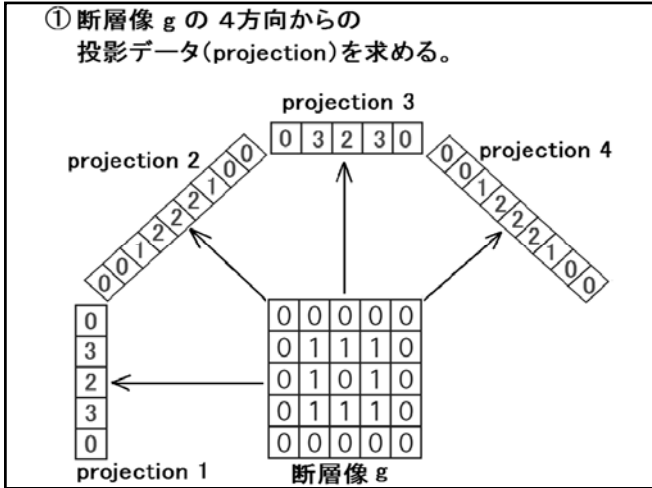
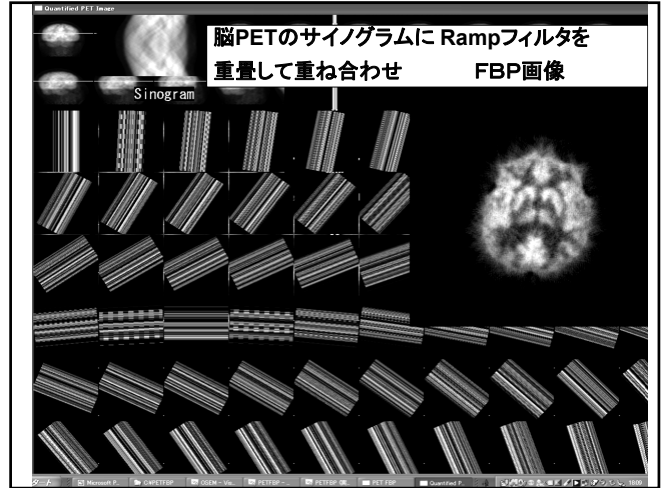
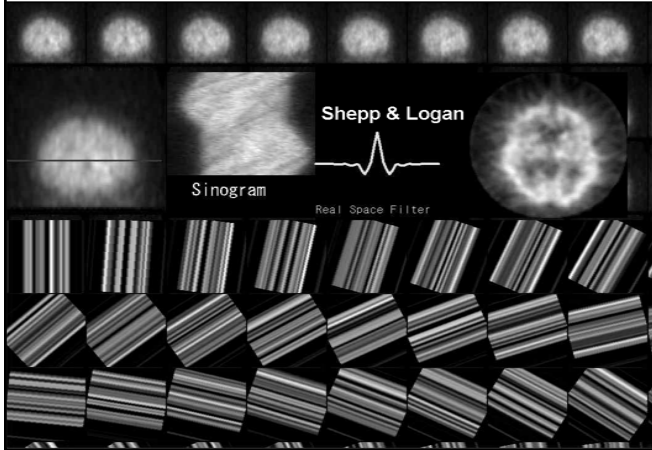
frequency  $f_r$

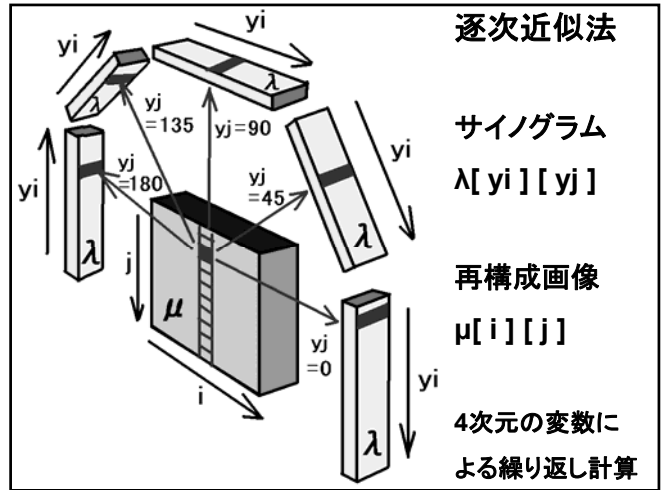
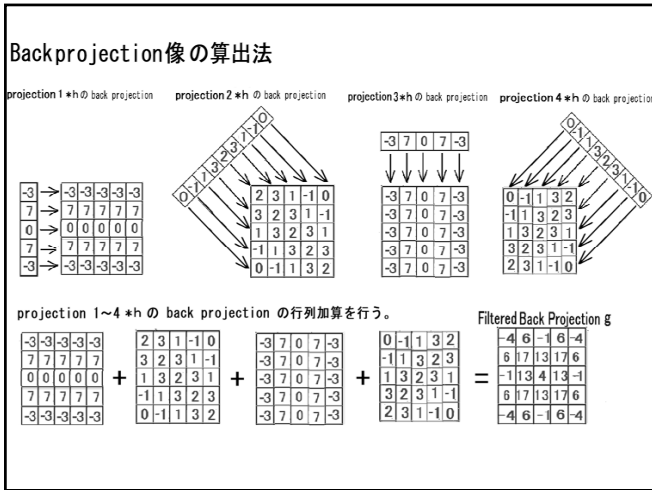
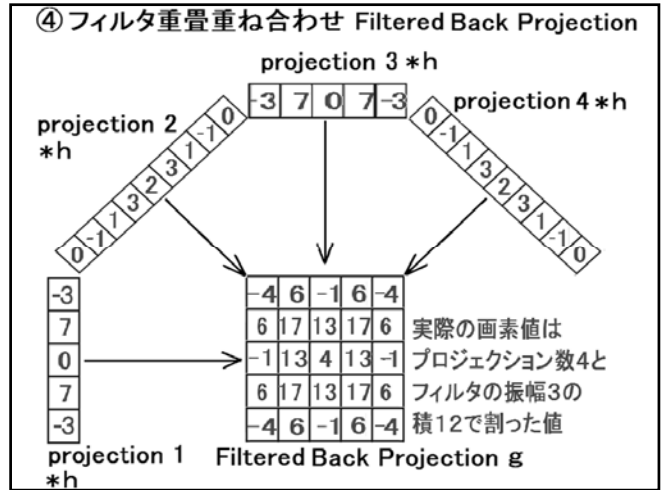
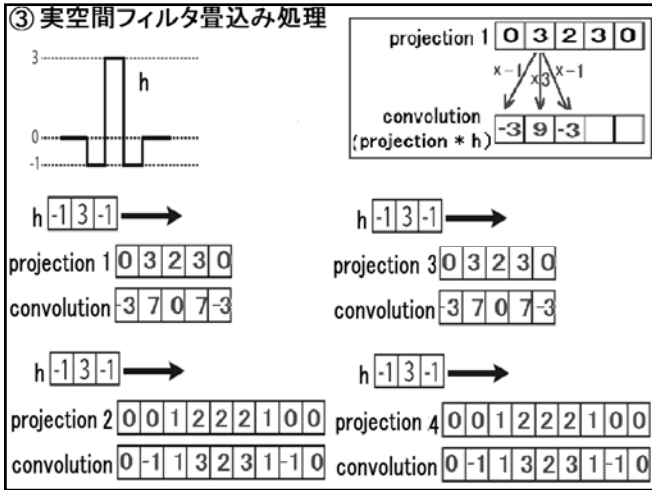
-0.5 0 0.5 (cycle/pixel)

Shepp & Logan フィルタ

周波数空間でナイキスト周波数に近い高周波成分の増幅を抑えることで、高周波雑音を低減させ、放射状アーチファクトが少ない断層画像を再構成する。

123I-IMP Brain SPECT FBP with Shepp&Logan filter





逐次近似画像再構成法で計算された断層画像の画素値は、定量性が保証されていない。繰り返し計算回数で画素値が変動する。

逐次近似再構成法 Iterative Reconstruction

PETやSPECT装置が収集した各々の角度における投影画像（Pθ）から断層画像を再構成する別の方法として確率的手法を用いた逐次近似画像再構成法がある。

フィルタ重畳逆投影法と比較し、投影データのカウン트가少なくても放射状アーチファクトが少なく、画質の良い断層画像を算出できる再構成だが、短所として、計算時間が長い、繰り返し回数を決める理論がない（何回繰り返し計算をするか主観的に決める場合が多い）。したがって、再構成画像の定量性もフィルタ重畳逆投影法と比較し、不確かである。

MLEM（Maximum Likelihood Expectation Maximization）という方法が基本的な逐次近似再構成法であるが、計算量が多く時間がかかるので、これを改良したOSEM（Ordered Subsets Expectation Maximization）という計算時間を短縮できる方法が使用されている。

再構成画像μの、画素[128][10]に対するサイノグラムλ[y<sub>i</sub>][y<sub>j</sub>]への寄与率(検出確率)C

角度y<sub>i</sub>における座標y<sub>i</sub>の投影データ(サイノグラム)をλ[y<sub>i</sub>][y<sub>j</sub>]と示す。

サイノグラムから再構成される断層画像をμ[i][j]とする。

逐次近似画像再構成法は、これらの4個の変数y<sub>i</sub>、y<sub>j</sub>、i、jによる4次元の繰り返し演算である。

再構成画像μの、画素[i][j]に対するサイノグラムλ[y<sub>i</sub>][y<sub>j</sub>]への寄与率C(検出確率)は4次元配列C[i][j][y<sub>i</sub>][y<sub>j</sub>]となる。

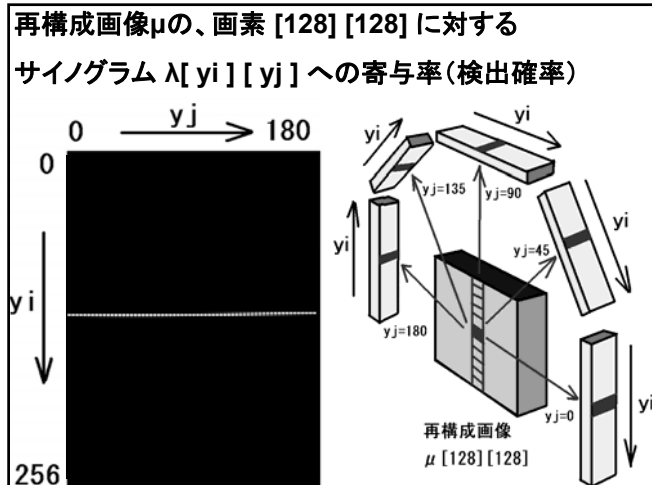
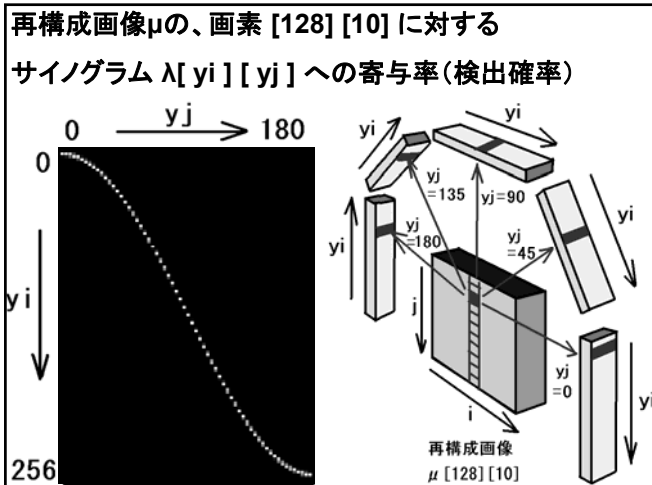
$\lambda = \sum C \mu$  (サイノグラム =  $\sum$  (検出確率 × 再構成画像))

正確に記述すると  $\lambda[y_i][y_j] = \sum C[i][j][y_i][y_j] \mu_k[i][j]$  (μ<sub>k</sub>[i][j] は、k 番目の繰り返し計算後の画像)

測定したサイノグラムλと再構成画像μ(初期値は全画素値1)について  $\lambda / (\sum C \mu)$  を求める。

$\lambda / (\sum C \mu) =$  真のサイノグラム / 画像μから推定されるサイノグラム

推定画像μの画素値が、真の値より大きすぎるとλ / (∑Cμ) は1未満になる。  
推定画像μの画素値が、真の値より小さすぎるとλ / (∑Cμ) は1以上になる。



再構成画像 $\mu$ の、画素 [i][j] に対する  
サイノグラム  $\lambda[y_i][y_j]$  への寄与率(検出確率)は、  
4次元配列  $C[i][j][y_i][y_j]$  となる。

$\lambda = \Sigma C \mu$  サイノグラム =  $\Sigma$ (検出確率 x 再構成画像)

正確に記述すると

$$\lambda[y_i][y_j] = \sum_i \sum_j C[i][j][y_i][y_j] \mu^k[i][j]$$

$\mu^k[i][j]$  は、k 番目の繰り返し計算後の画像

測定したサイノグラム  $\lambda$  と再構成画像  $\mu$  (初期値は  
全画素値1) について  $\lambda / (\Sigma C \mu)$  を求める。

$\lambda / (\Sigma C \mu)$   
= 真のサイノグラム / 画像 $\mu$ から推定されるサイノグラム

推定画像 $\mu$ の画素値が、真の値より大きすぎると  
 $\lambda / (\Sigma C \mu)$  は 1 未満になる。

推定画像 $\mu$ の画素値が、真の値より小さすぎると  
 $\lambda / (\Sigma C \mu)$  は 1 以上になる。

$\Sigma C (\lambda / (\Sigma C \mu)) / \Sigma C$   
撮像した全方向について  $\lambda / (\Sigma C \mu)$  の平均  
(検出確率  $C$  をかけた加重平均)を求める。

正確に記述すると

$$\frac{\sum_{y_i, y_j} \sum_i \sum_j C[i][j][y_i][y_j] (\lambda[y_i][y_j] / (\sum_i \sum_j C[i][j][y_i][y_j] \mu^k[i][j]))}{\sum_{y_i, y_j} \sum_i \sum_j C[i][j][y_i][y_j]}$$

この式の値は配列(要素数は  $i \times j$ )

k 番目の再構成画像 $\mu^k$  の各画素ごとに  
 $\Sigma C (\lambda / (\Sigma C \mu)) / \Sigma C$   
の値をかけて、次の推定画像  $\mu^{k+1}$  の画素値を算出。  
 $\mu^{k+1} / \mu^k = \Sigma C (\lambda / (\Sigma C \mu)) / \Sigma C$   
逐次近似再構成法 MLEM、OSEM の式

正確に記述すると

$$\mu^{k+1}[i][j] / \mu^k[i][j] = \frac{\sum_{y_i, y_j} \sum_i \sum_j C[i][j][y_i][y_j] (\lambda[y_i][y_j] / (\sum_i \sum_j C[i][j][y_i][y_j] \mu^k[i][j]))}{\sum_{y_i, y_j} \sum_i \sum_j C[i][j][y_i][y_j]}$$



OSEM は、 $y_j$  (サイノグラムの角度成分)の計算ループを間引いて  $C (\lambda / (\sum C \mu)) / \sum C$  の値を求めて、次の推定画像  $\mu$ の画素値を算出。

例えば、 $y_j$  が 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の9方向で、subsets を 3 に設定すれば、

まず、 $y_j = 0, 3, 6$  の値で  $\mu^k$  を計算する。  
次に、 $y_j = 1, 4, 7$  の値で  $\mu^k$  を基に  $\mu^{k+1}$  を計算する。  
更に、 $y_j = 2, 5, 8$  の値で  $\mu^{k+1}$ を基に  $\mu^{k+2}$ を計算する。

計算量は MLEM の 1回繰り返しと同量だが、MLEM を 3回繰り返しした場合と同等の画像を得られる。

```

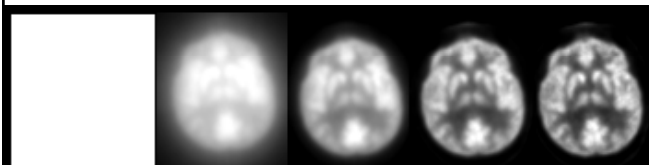
// OSEM OSEM プログラム 単純な加減乗除ばかりだが、
// forループ が何重も連続する。膨大な計算量。
for(k=0;k<20;k++){
  for(sub=0; sub<8; sub++){ s1 = sub - 2*(int)((double)sub/2.0); s2 = 1-s1;
    for(j=0;j<192;j++){ for(i=0;i<192;i++){ S_YC_CM[i] = SC[i] = 0.0; }}
    for(j=0;j<192;j++){ printf("Wn j= %d ",j); for(i=0;i<192;i++){
      for(yj=sub; yj<32; yj+=8){ for(yi=CZL[i][yj][0]; yi<CZL[i][yj][1];yi++){
        CM=0.0; for(ii=0;ii<192;ii++){ for(i=CZM[yj][yi][0];i<CZM[yj][yi][1];i++){
          CM += C[i][ii][yj][yi] * M[i][ii][k][s1]; }}
          S_YC_CM[i][yj] += Yi[yi][yj] * C[i][ii][yj][yi] / CM; SC[i][ii] += C[i][ii][yj][yi];
        }} // yi, yj
      }} // i, j
    for(j=0;j<192;j++){ for(i=0;i<192;i++){
      if(SC[i][ii]>0) M[i][ii][k][s2] = M[i][ii][k][s1] * S_YC_CM[i][yj] / SC[i][ii]; }} // j, i
    }} // sub
    for(j=0;j<192;j++){ for(i=0;i<192;i++){ M[i][ii][k+1][s2] = M[i][ii][k][s2]; }} // j, i
    Disp_M(k,s2); printf("WnWnNext iteration ? ");scanf("%c",&n); if(y_n=='n')break;
  }} // k

```

### OSEM 計算結果

Subsets 2 繰り返し計算回数 k

k = 0 k = 2 k = 4 k = 10 k = 20



サイノグラム (横から測定した全方向からのデータ) から、確率の高い断面像を 逐次推定していく。

撮像した全方向について  $\lambda / \sum C \mu$  の平均 (検出確率  $C$  をかけた加重平均) を求める。式で表すと、

$$\frac{\sum C (\lambda / \sum C \mu)}{\sum C} \text{ この式の値は要素数が } i, j \text{ の配列なので正確に記述すると、}$$

$$\frac{\sum \sum C [i][j][y_i][y_j] (\lambda [y_i][y_j]) / (\sum \sum C [i][j][y_i][y_j] \mu^k [i][j])}{\sum \sum C [i][j][y_i][y_j]}$$

$k$  番目の再構成画像  $\mu^k$  の各画素ごとに  $\sum C (\lambda / (\sum C \mu)) / \sum C$  の値をかけて、次の推定画像  $\mu^{k+1}$  の画素値を算出する。式で表すと、

$$\mu^{k+1} / \mu^k = \sum C (\lambda / (\sum C \mu)) / \sum C \quad \text{逐次近似再構成法 MLEM の式}$$

正確に記述すると

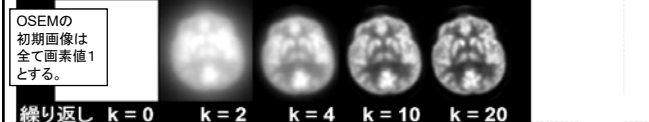
$$\mu^{k+1} [i][j] / \mu^k [i][j] = \frac{\sum \sum C [i][j][y_i][y_j] (\lambda [y_i][y_j]) / (\sum \sum C [i][j][y_i][y_j] \mu^k [i][j])}{\sum \sum C [i][j][y_i][y_j]}$$

OSEM は、 $y_j$  (サイノグラムの角度成分)の計算ループを間引いて  $C (\lambda / (\sum C \mu)) / \sum C$  の値を求めて、次の推定画像  $\mu$ の画素値を算出する。

例えば、 $y_j$  が 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の9方向で、subsets を 3 に設定すれば、まず、 $y_j = 0, 3, 6$  の値で  $\mu^k$  を計算する。  
次に、 $y_j = 1, 4, 7$  の値で  $\mu^k$  を基に  $\mu^{k+1}$ を計算する。  
更に、 $y_j = 2, 5, 8$  の値で  $\mu^{k+1}$ を基に  $\mu^{k+2}$ を計算する。

計算量は MLEM の 1回繰り返しと同量だが、MLEM を 3回繰り返しした場合とほぼ同等の画像を得られるので、OSEMでは計算量、計算時間が 1/3 になる。OSEMは、サイノグラムを全部使わないで断層画像を推定していくが、逐次異なる角度からのサイノグラムを使うのでプロジェクションデータは全部有効に利用している上で、計算の分量が減らせるアルゴリズムである。

**OSEM 計算結果** 繰り返し回数を多くするほど画像が鮮明化。



OSEMの初期画像は全て画素値1とする。

## 平成27年 国家試験 解答 2

2方向からの投影データを基に、2×2画素からなるCT画像を逐次近似法(ART(algebraic reconstruction technique)法)にて再構成する手順を図に示す。a～dの数値の組合せで正しいのはどれか。

(1)  $\frac{6+14}{2 \times 2} = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

(2)  $\frac{8+12}{2} = 10 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

(3)  $\frac{6-10}{2} = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

(4)  $\frac{14-10}{2} = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

(5)  $\frac{8-10}{2} = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

(6)  $\frac{12-10}{2} = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

1. 1 5 7 7  
2. 2 4 6 8  
3. 3 3 5 9  
4. 4 2 4 10  
5. 5 1 3 11

投影データ 6, 14, 8, 12

(1)  $\frac{6+14}{2 \times 2} = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

断層画像の投影データ  $P_{\theta}$  の値の合計は、どの角度  $\theta$  でも、だいたい同じ程度の値になるはず。逐次近似法を計算するには、初めに適当な初期値が、断層画像の画素に入っていないなければならない。そこで、まず右方向への透視データの合計を算出。それを断層画像(この問題では  $2 \times 2$  の画素数)のすべてに同じ画素値が入っているという初期条件を考える。

(3)  $\frac{6-10}{2} = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

(4)  $\frac{14-10}{2} = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

断層画像の画素すべてに画素値5が入っているという初期条件で、右方向への透視データを算出する。正しい投影データ  $P_{\theta}$  と、初期条件での投影データの差分を算出。その差を、透視した画素の数で割って、それぞれ透視した画素の画素値に加える。

(6)  $\frac{8-10}{2} = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

(7)  $\frac{12-10}{2} = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

次に、透視の向き  $\theta$  を下方向にして、同様の計算。正しい下向き投影データ  $P_{\theta}$  と、計算途中の断層画像の下向き投影データの差分を算出。その差を、透視した画素の数で割って、それぞれ透視した画素の画素値に加える。このように、逐次、投影データと整合する断層画像を計算する方法が、逐次近似画像再構成法。

### 第3の断層画像再構成法

AIによる Deep Learning を用いた方法  
数十万通りのサイノグラムと断層画像との組み合わせをコンピュータに学習させ、作業でサイノグラムから断層画像を推定する。

CAE (Convolutional Auto Encoder)  
Deep Learningによる画像生成のための学習モデルのひとつ。高い特徴抽出力を持つ Convolution レイヤーを学習モデルに組み込み、データを入力すると最終的に画像が出力されるよう設定する。

CT, SPECT, PETは人体の断層図を得るために、その断面の多方向からの透視像(サイノグラム)を収集。

AIによる Deep Learning では、数十万通りのサイノグラムから、それぞれの断層像を学習させる。

Deep Learning による断層画像算出の利点は、  
 1. 断層画像を推定する時間が非常に短い。  
 2. FBP法で出るアーチファクトなどが出ない。  
 Deep Learning による断層画像の欠点は、定量性が保証できない。

金属義歯を含む 上顎部の サイノグラム	FBP法では 金属義歯周囲に 金属アーチファクト が出る	Deep Learning では 金属アーチファクト が出ない
---------------------------	---------------------------------------	--

