SPECT(Single Photon Emission CT) PET(Positron Emission CT) の原理

断層画像を得る方法

フィルタ重畳逆投影法

FBP (Filtered Back Projection)

逐次近似再構成法 Iterative Reconstruction

MLEM (Maximun Likelihood Expectation Maximization)

OSEM (Ordered Subsets Expectation Maximization)

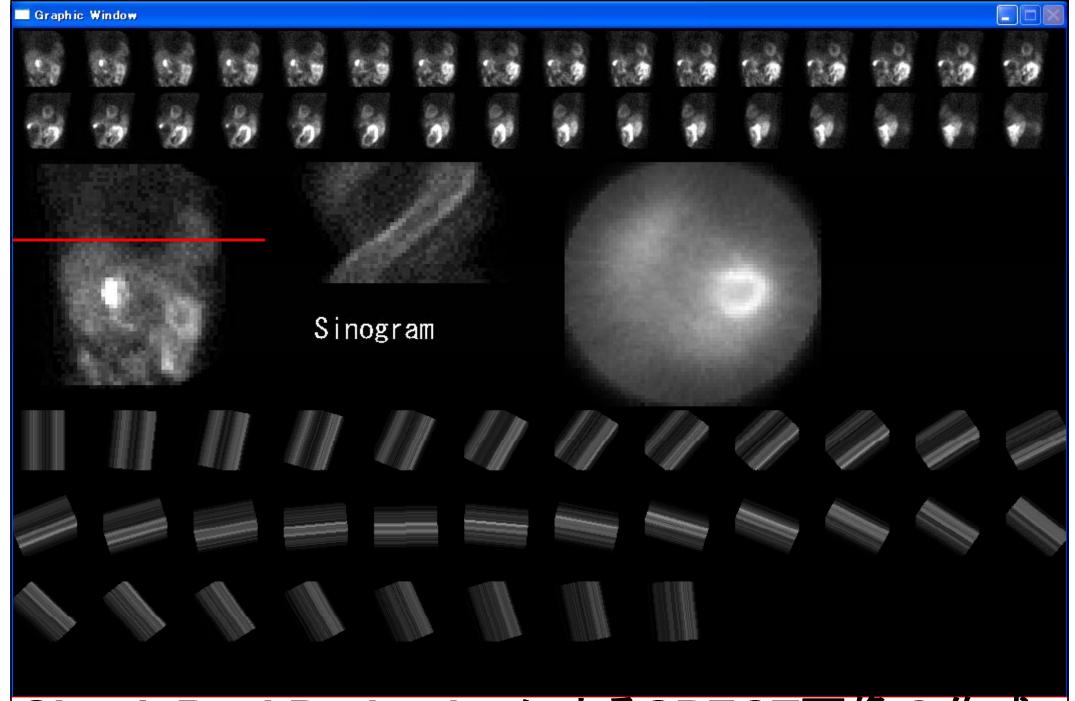
Convolution 重畳積分 投影データ 補正後の投影データ (*)補正フィルタ

投影

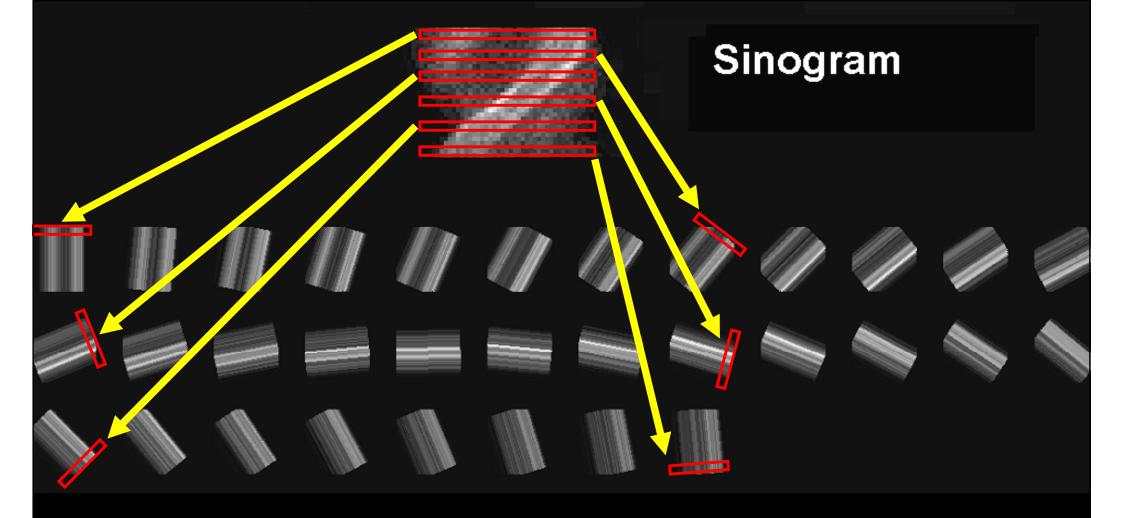
図 4・31 投影データ収集とフィルタ補正逆投影

逆投影

FBP
Filtered
Back
Projection



SimpleBackProjectionによるSPECT画像の作成



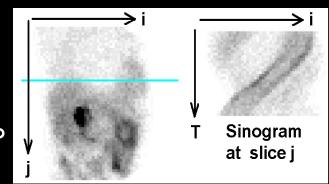
サイノグラムの各スライスの1次元配列は、32方向の各々の角度から収集されたデータ。

このデータから、収集された各々の角度に傾いた 2次元透視画像($P\theta$)を作成する。

単純重ね合わせ再構成法 Simple Back Projection

収集された各々の角度に傾いた2次元透視画像(Pf)を全部単純に重ねると再構成画像ができる。 (回転中心近傍の値が盛り上がった不正確な画像。)

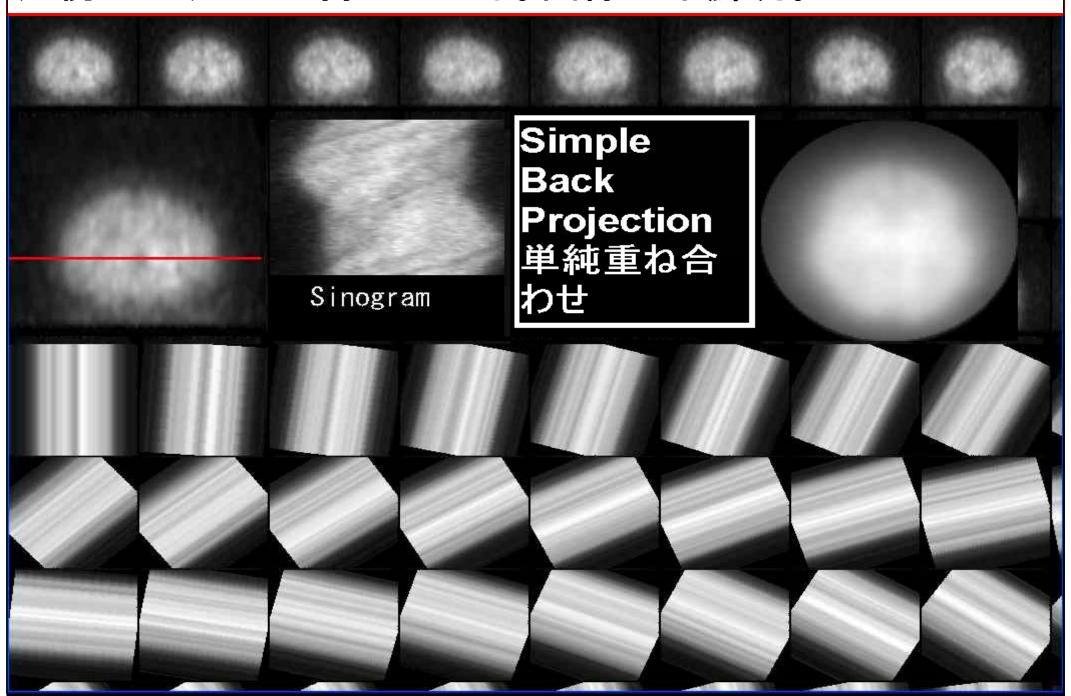
スライス j におけるサイノグラムを求める。 サイノグラムの各スライスの 1 次元配列は、 3 2 方向の各々の角度から収集されたデータ。



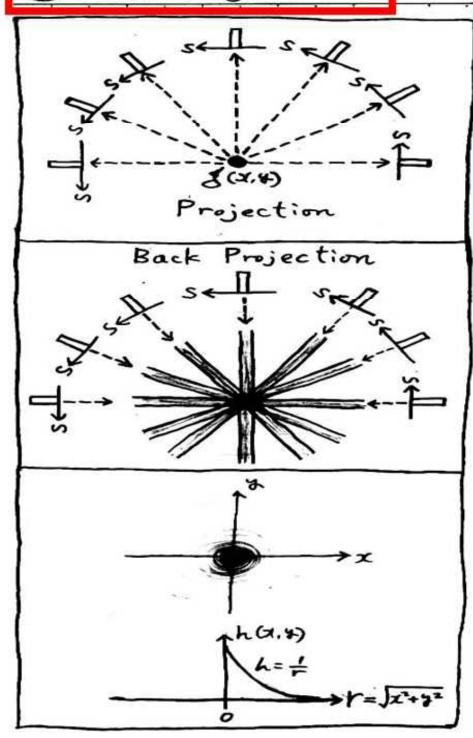
サイノグラムの各スライスの1次元配列から、収集された各々の角度に傾いた2次元透視画像 $P\theta$ を作成する。 $P\theta$ を単純に重ね合わせた画像を」とすると

 $I = \int P\theta d\theta$ (Simple back projection)

I は、回転中心部ほど重ね合せ回数が多くなり、 中心から距離が遠いほどカウントの低い像になる。 123I-IMP Brain SPECT 単純重ね合わせ像は回転中心 近傍のカウントが持ち上がる。画像が不鮮明。



3 Back Projection



メキ平面上の1点 ð(ス.も)の 透視データ Po(s) (Projection) き θ=0~エの範囲で求める。

次に Po(s) も重ね合わせて 画像の再構成を行なう (Back Projection) 得られる画像ん(s,0) は ん(s,0)= $\sum P_{\theta}(s)\Delta\theta$ = $\int_{0}^{\infty} P_{\theta}(s) d\theta$

らいのは中心部はご重ね合わせ回数が多くなり、中心から遠ざかるほど少なくなって、元の点の何象には戻らず、点の存在した位置からの記したで離に反此何した。濃度分布の係をつくる。

重ね合わせの 点像分布関数ん(x,x)は h(x,y)= 1/2 = 1/(x²+y²)

つまり、回転中心からの距離rに反比例した濃度に補正する フィルタ1/rを正確な断層像gに畳み込んだ像が | である。 式で表現すると l=g*(1/r)となる。(* は畳み込み演算) Ⅰ、g、1/r のフーリエ変換を L、G、F(1/r) と 表現すると、畳み込みの定理より $L=G\cdot F(1/r)$ となる。 2次元フーリエ変換の公式の極座標表現を用いると、 (frは周波数空間上の原点からの距離) F(1/r) = $\int \int (1/r) \exp(-j(2\pi r f r)) r d r d\theta = 1/f r$

これより L = G / f r なので $G = L \cdot f r$

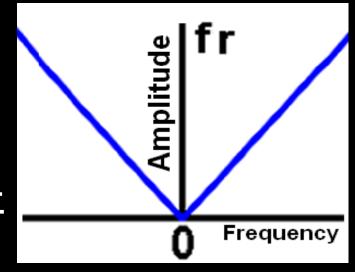
 $G = L \cdot f r$ の 意味は、 2次元周波数空間上で、 単純重ね合わせ画像をフーリエ変換した 2次元データ L に、 フィルタ関数 f r (f r は周波数空間上の原点からの距離) をかけると、正しい再構成画像をフーリエ変換したデータ G

になる。

G=L・fr に、畳み込みの定理 を

用いると、以下のような実空間での計算に変換できる。

この式を逆フーリエ変換すると、



(*は畳み込み演算)

この式に、 $I = \int P\theta \ d\theta$ を代入すると、 $g = \int P\theta \ d\theta * h$ (* は畳み込み演算) $g = \int (P\theta * h) d\theta$ (hは θ と独立した値なので交換可)

$$g = \int \overline{P\theta} d\theta$$
 ($\overline{P\theta} = P\theta * h$) FBPの式

Pθ に 実空間フィルタ h (= frの逆フーリエ変換) を畳み込めば、 重ね合せると正確な断層像 g になる2次元透視画像 Pθ を 算出できる。これを Filtered Back Projection (FBP) という。

周波数空間での実際の計算においては、フィルタ H(=fr)は 常に正の値であり(絶対値)、

さらにサンプリング定理より、ナイキスト周波数以上の成分を 削除する必要があるので、 周波数空間での再構成フィルタ Hは、

H = | f r | (f r がナイキスト周波数未満の場合)

H = O (frがナイキスト周波数以上の場合)

となる。これをRampフィルタという。

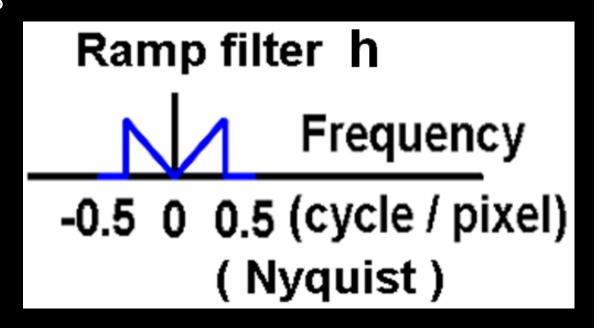
Rampフィルタを逆フーリエ変換して

実空間Rampフィルタhにしてから、

実空間で $P\theta$ にhを畳み込む。

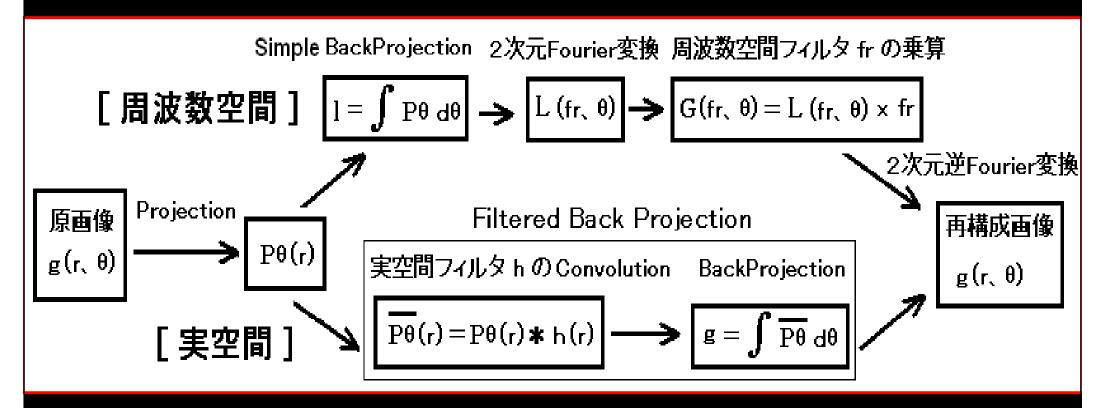
 $P\theta = P\theta * h$

(*は畳み込み演算)



フィルタ逆重畳画像再構成法 Filtered Back Projection (FBP)

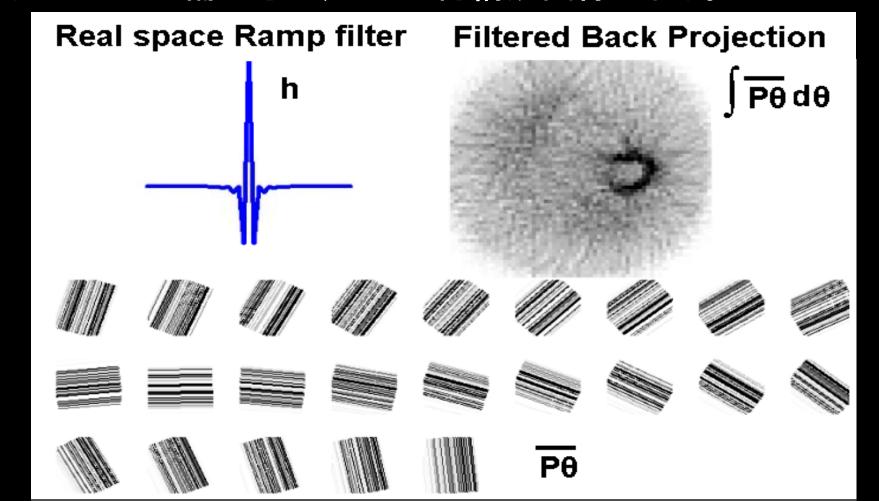
サイノグラムの2次元透視画像 $P\theta$ に、実空間フィルタ h (= frの逆フーリエ変換)を畳み込めば、重ね合せると正確な断層像 g になる2次元透視画像 $P\theta$ を算出できる。



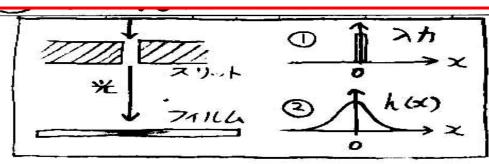
hを畳み込んだ2次元透視画像 Pt を単純に重ね合わせた画像 g は、

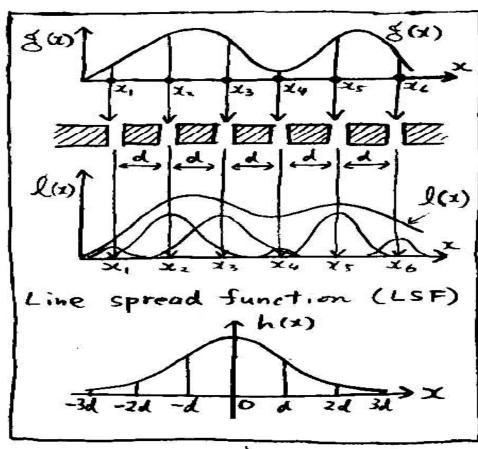
 $g = \int P\theta \ d\theta$ (Filtered back projection)

Filtered back projection は、 回転中心部ほど重ね合わせ回数が多くなる誤差が フィルタhによって補正され、正しい再構成画像となる。



畳込みの定理 Convolution





スリットを通した ビーム ①かってんしゃ フィルム 上 ご ②のょうなんめの 濃度分布の修をさつくるとする。

又軸に沿って明るさがが(x)である 程状の被写体を,間隔すの スリットを通してブルムに写す。

フィルムのメチの位置での濃度は

任意の座標以における(は)は

$$\begin{array}{l}
\mathcal{L}(x_i) = \mathcal{E}(x_i) h(\omega) \\
+ \mathcal{E}(x_{i+1}) h(x_i - x_{i+1}) \\
+ \mathcal{E}(x_{i+2}) h(x_i - x_{i+2}) + \cdots \\
+ \mathcal{E}(x_{i+2}) h(x_i - x_{i+1}) \\
+ \mathcal{E}(x_{i-2}) h(x_i - x_{i-2}) + \cdots
\end{array}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g(x_n)h(x_i-x_n)$$

スリットを取りはずすと(スリット間隔を無限に狭くすると)任意の座標とになけるフィルムの濃度(は)は

$$L(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(n) h(x-n) dn$$
 (convolution 種分 (たたみ込み 種分) これを $L(x) = g(x) * h(x)$ と 起わす、 $h(x)$ を convolution 関数 という. $g(x) + g(x) + g(x) = g(x) + g(x) = g$

たたみ込みの定理

h(x-n)の Fourier 変換を H(f)とすると h(x-n) = fH(f)e)(2xf(x-n))df (连Fourier変換) これを l(x) = 「き(n) h(x-n) dn に代入すると $l(x) = \int \xi(n) \int H(f) e^{j(2\pi f x)} e^{-j(2\pi f n)} df dn$ = [[s(n)e-j(271fn)dn H(f)ej(271fx)df = $\int G(x) H(x) e^{j(2\pi fx)} dx$ りは)の Fourier 変換をしけりとすると l(x)= \ L(f) e > (2xfx) df , s, z L(f)= G(f) H(f)

畳み込みの定理

データgをフーリエ変換して、

その周波数空間成分Gに

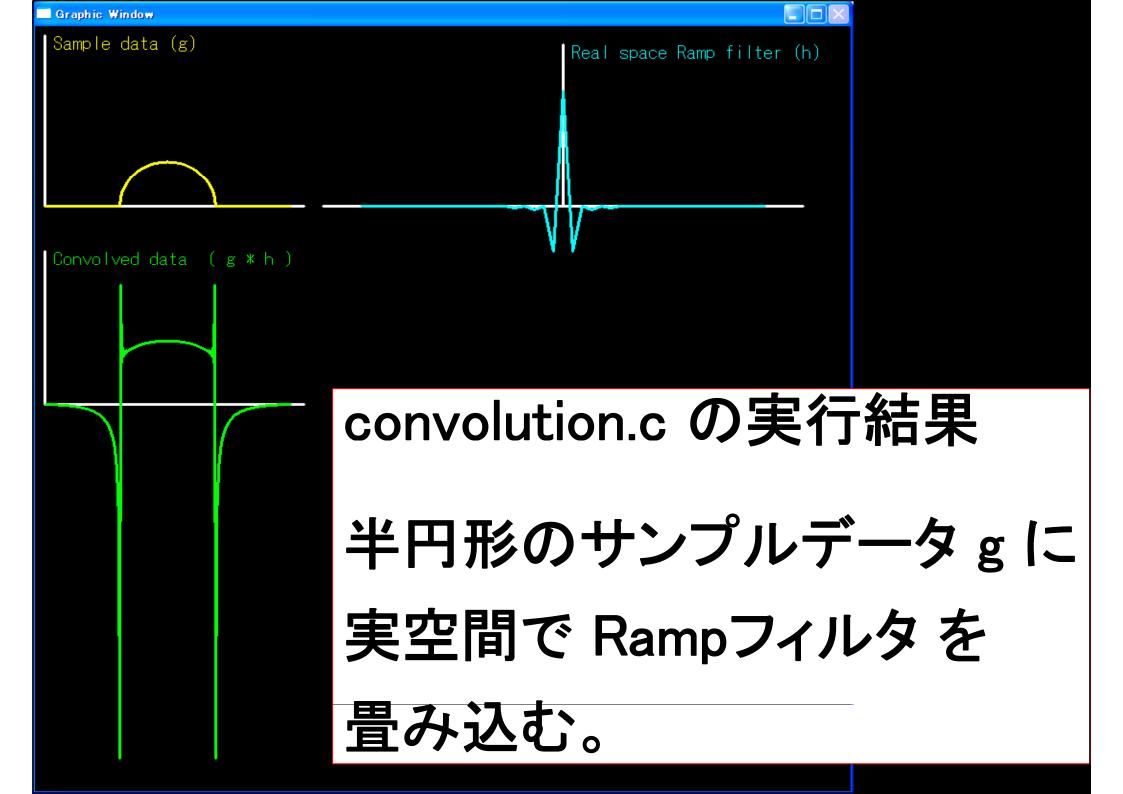
周波数空間 Rampフィルタ H をかけて

逆フーリエ変換すると、

実空間で、実空間 Rampフィルタ h を

gに畳み込みしたデータと同じになる。

(GxH と g*h は等価演算)



量み込み Convolution I=g*h

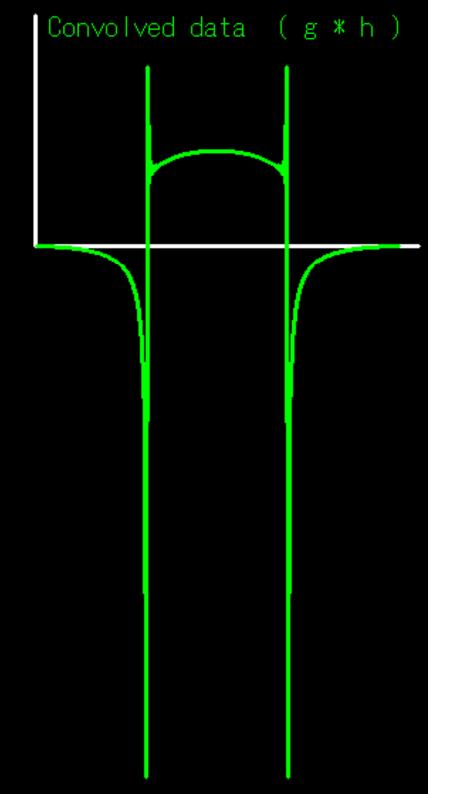
サンプルデータ g[]に 実空間Rampフィルタ h[]を畳み込んで、配列 I[]に書き込む。

```
for( i=1; i<=256 ; i++ ) {
  gh = 0.0;
  for(j=0; j<=127; j++){ if( i+j <= 256) gh += g[ i+j ] * h[ j ]; }
  for(j=1; j<=127; j++){ if( i-j >= 1 ) gh += g[ i-j ] * h[ j ]; }
  I[i] = gh;
```

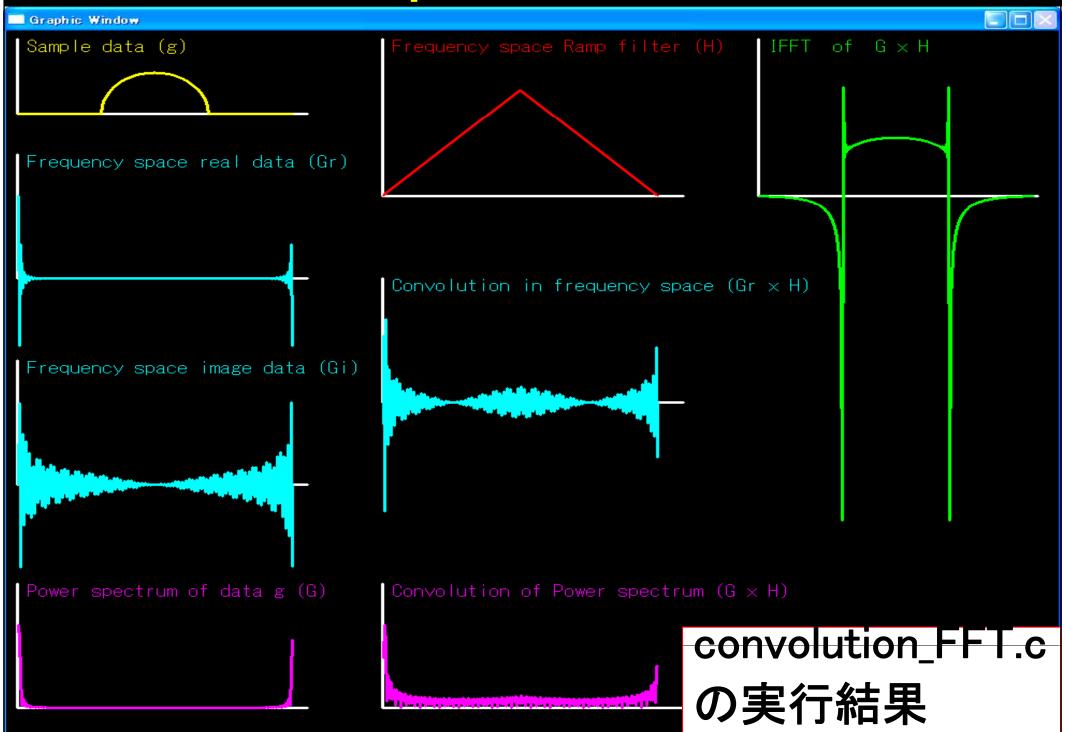
実空間 Rampフィルタ h の 積分値は 1 なので、

畳み込む前後の

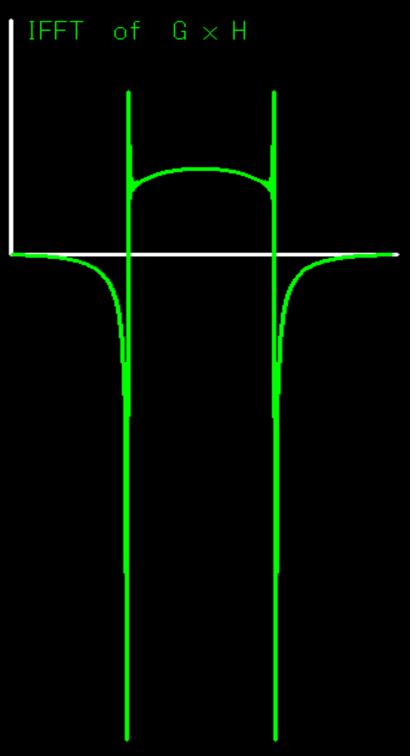
g と l (= g*h) の積分値は 同じ。



周波数空間で Rampフィルタを かける



データgの周波数成分 Gr、Gi に、 周波数空間 Rampフィルタ H を かけて、逆フーリエ変換すると、 実空間で、実空間 Rampフィルタ h をgに畳み込みしたデータと同じに なる。(GxHとg*hは等価演算)



Rampフィルタは理論的には正確な再構成フィルタだが、 実際の臨床データに適用するとナイキスト周波数以上の高周波 成分を不連続に遮断するために生じる高周波ノイズや 放射状 アーチファクトが目立つ場合が多いため、

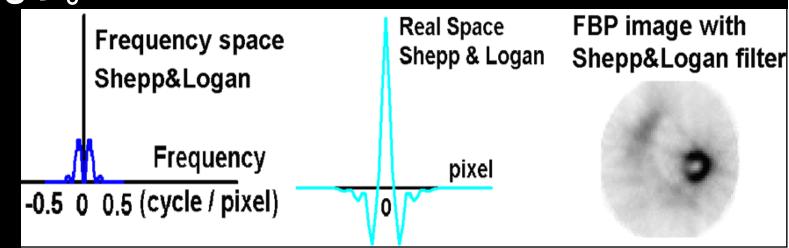
臨床では高周波成分を抑制する工夫を施した再構成フィルタが 用いられている。

SPECTで用いられる一般的な再構成フィルタとして、

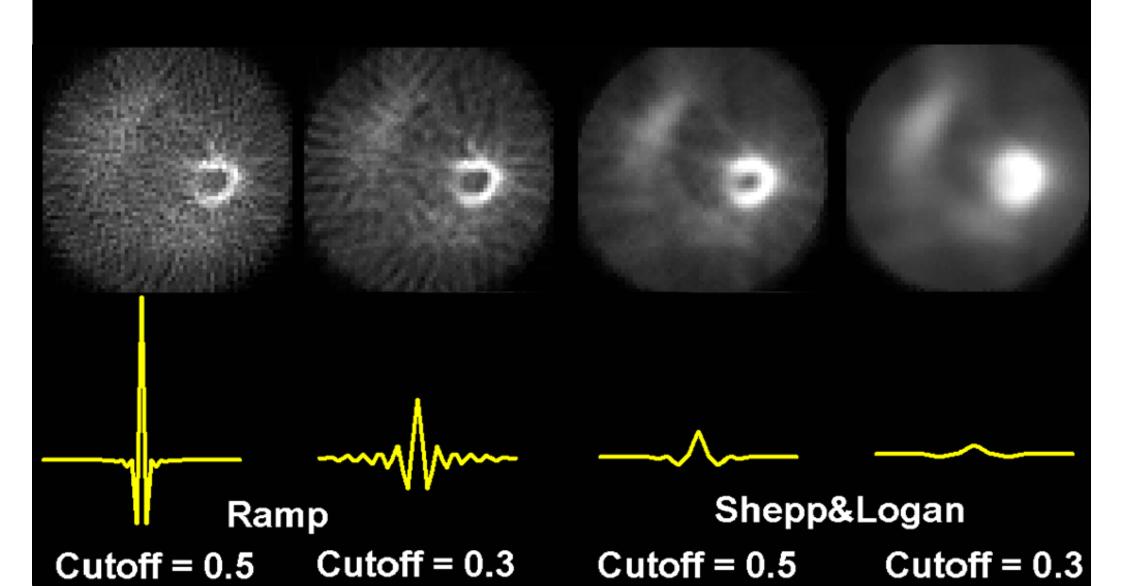
Shepp&Loganフィルタがある。

周波数空間上で、ナイキスト周波数近傍の高周波成分を連続的に減衰させるように設計されており

再構成画像に生じる高周波ノイズや放射状アーチファクトを 抑制する効果をもつ。



実空間フィルタを畳込んだ2次元透視画像($P\theta$)を 重ね合わせるとフィルタ逆投影再構成像ができる。 フィルタの形状で、再構成画像の高周波成分が変る。



周波数空間上の

64x64画像用 Shepp & Logan フィルタ

Shepp-Logan of
$$\Rightarrow$$

$$H(3r) = \left| \frac{f_0}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi f_0}{s_0}\right) \sin^2\left(\frac{f_r}{s_0}\right) \right|$$

$$\left(\sin c \, x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)$$

Shepp&Logan filter

Cut off = 0.5

Frequency

Frequency space Shepp&Logan

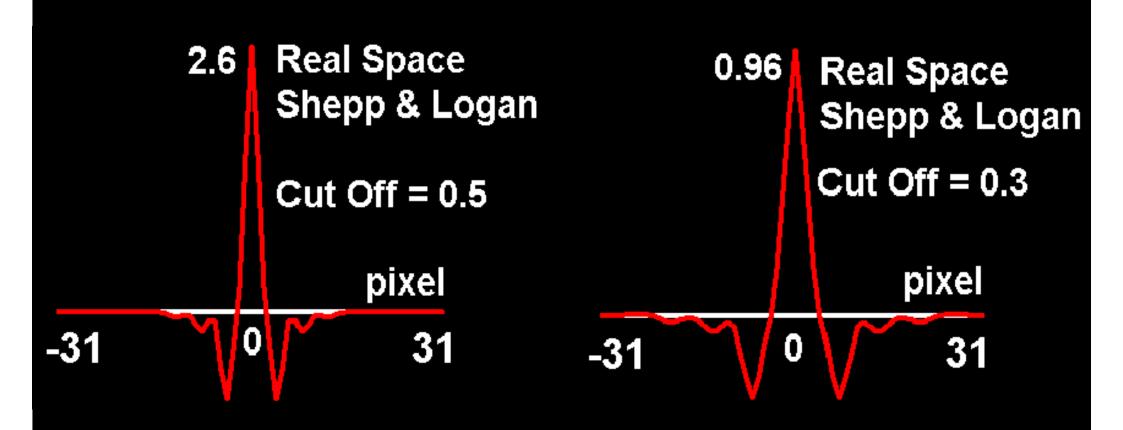
for FFT

Cut off = 0.5

Frequency

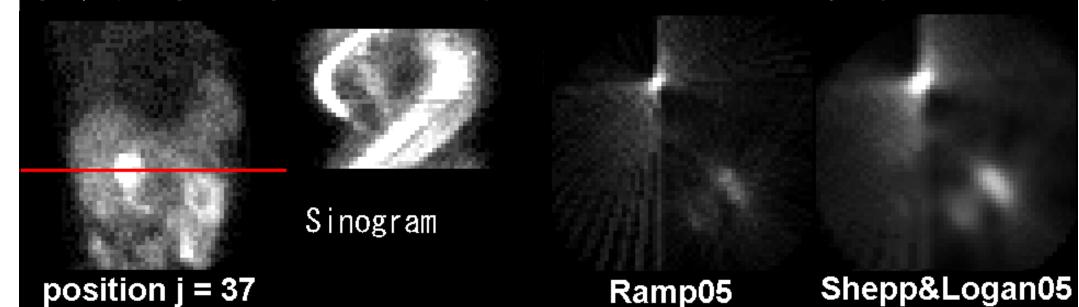
- -32 0 32 (cycle / 64 pixel) 0 32 0 (cycle / 64 pixel)
- -0.5 0 0.5 (cycle / pixel) 0 0.5 0 (cycle / pixel)

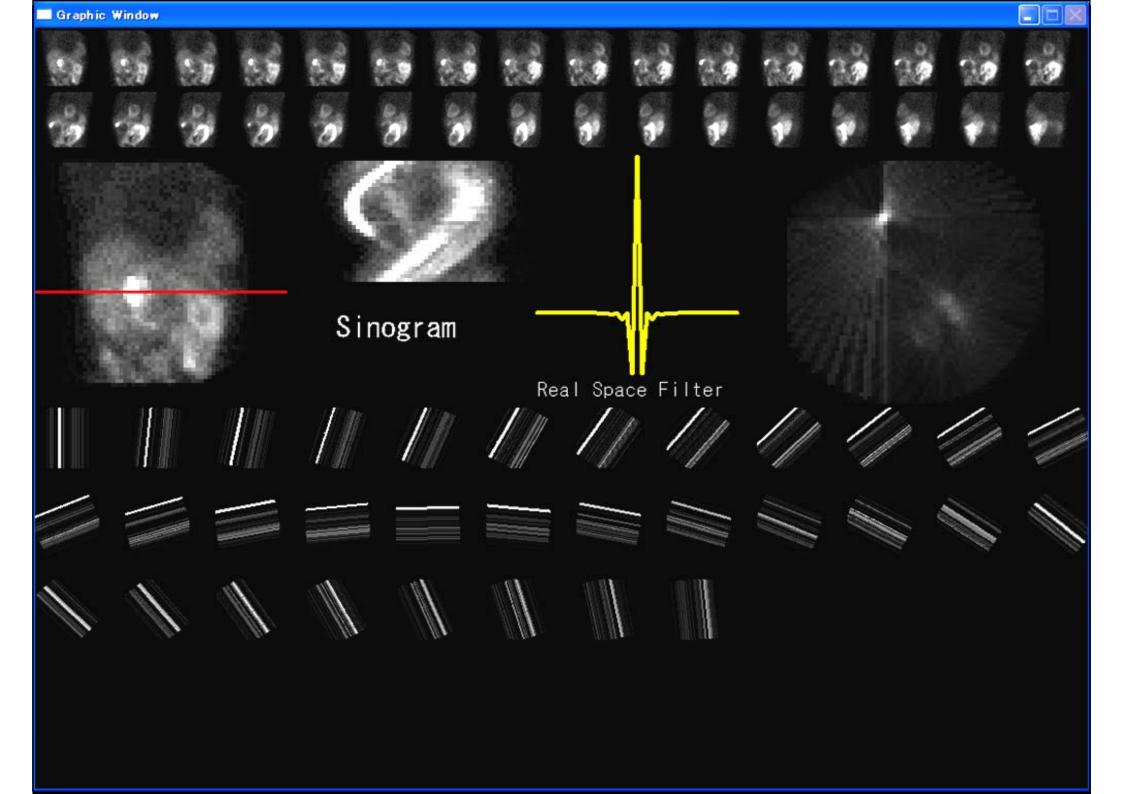
逆フーリエ変換された実空間 Shepp & Loganフィルタ 実空間フィルタの積分値は 1



MIBI 心筋SPECT再構成を 胆嚢のスライスで行うと 胆嚢内の 99mTc-MIBI 停滞部位の再構成像が 作成される(99mTc-MIBI は胆汁排泄あり)。

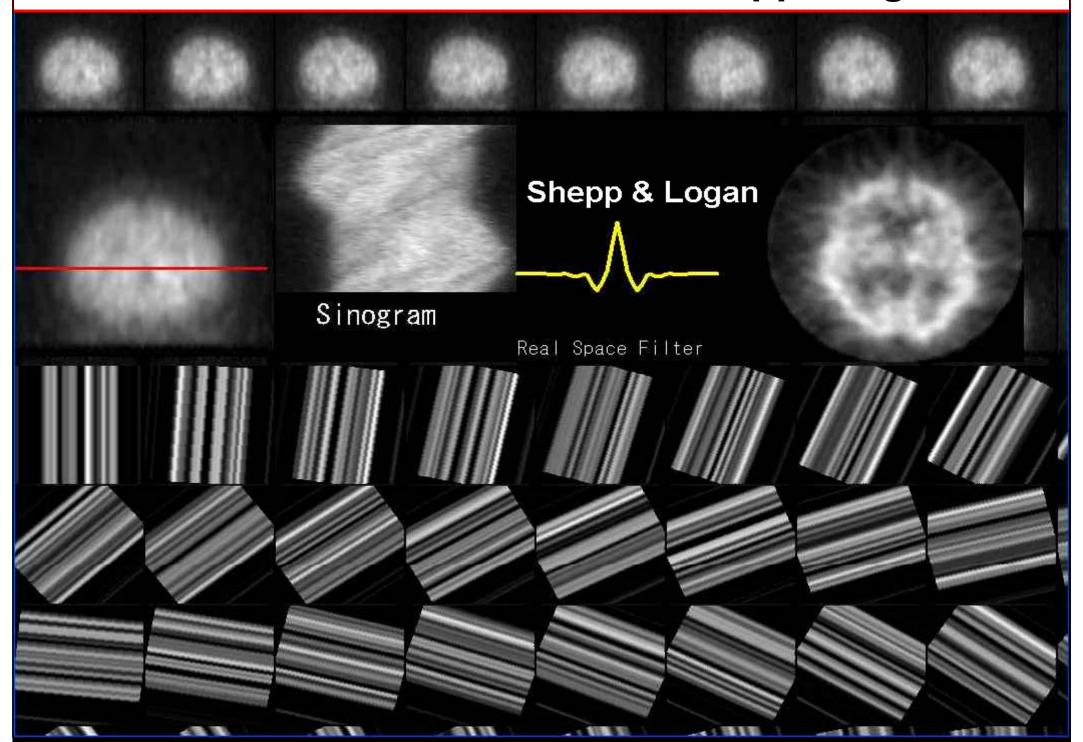
局所的に強いRI分布を示すスライスではフィルタ逆投影再構成像は、放射状アーチファクトが強く出ることが確認できる。(99mTc-MIBI検査前は絶食の前処置(胆汁が少ない状態)が必要。)

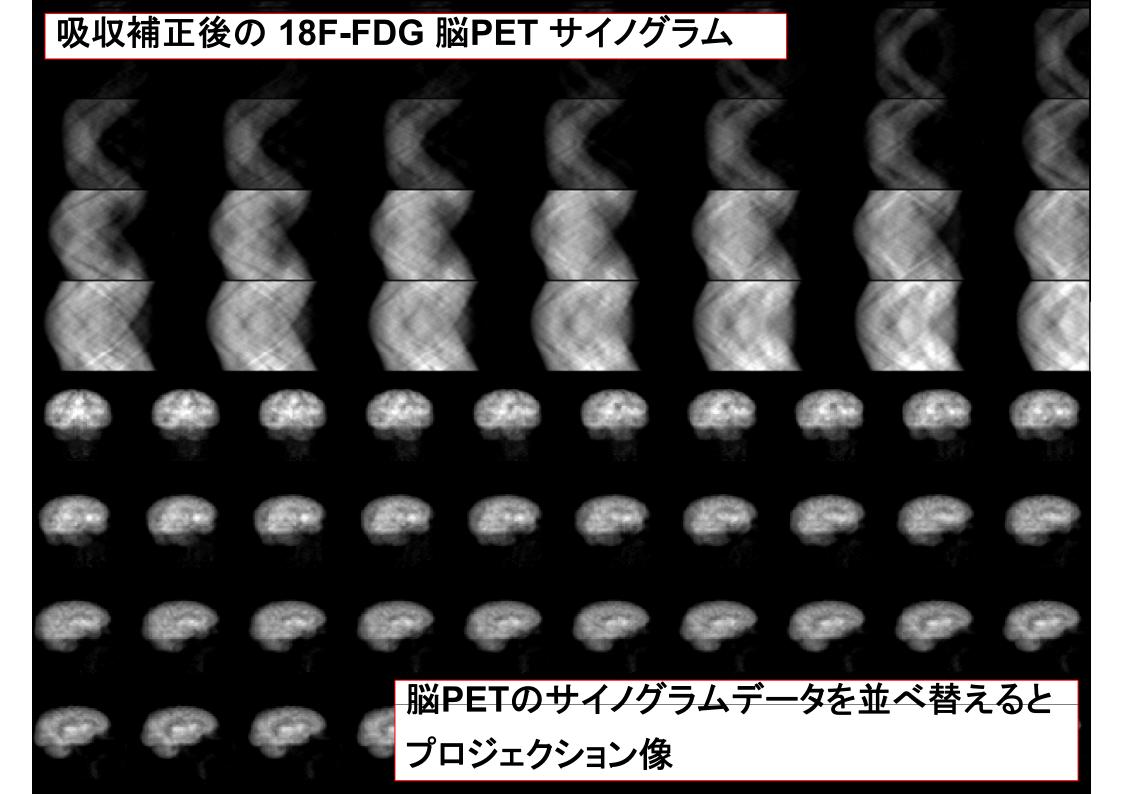


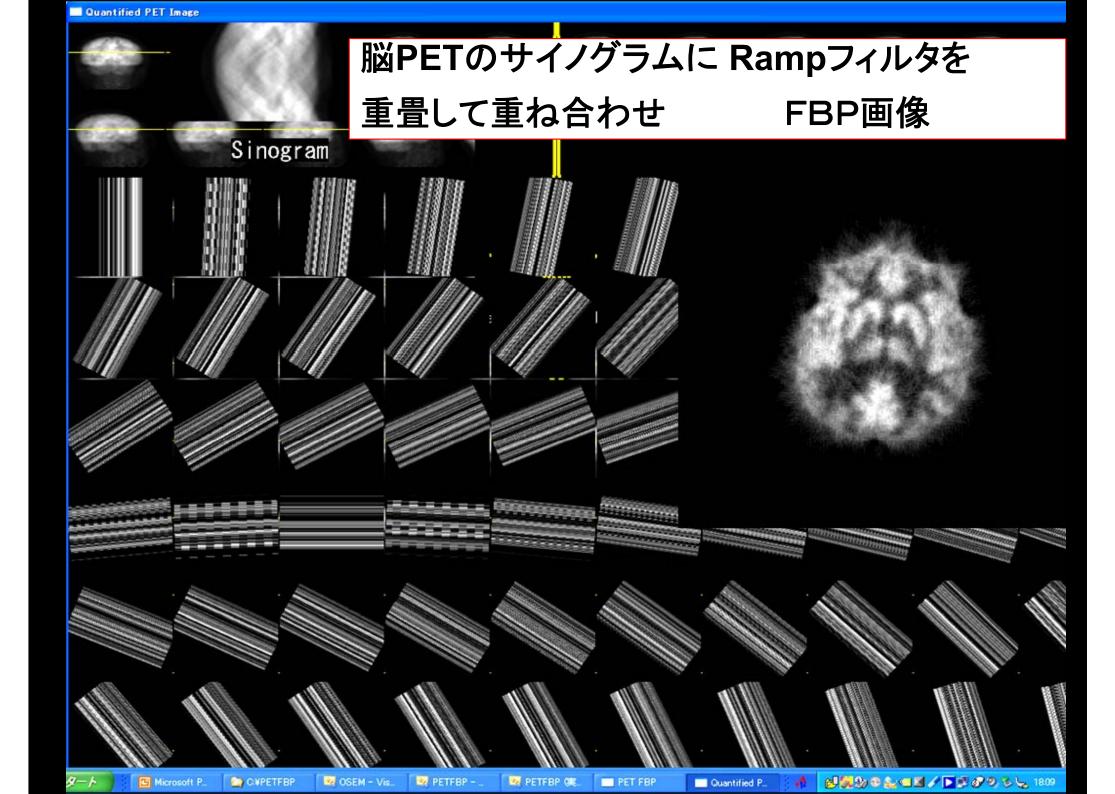


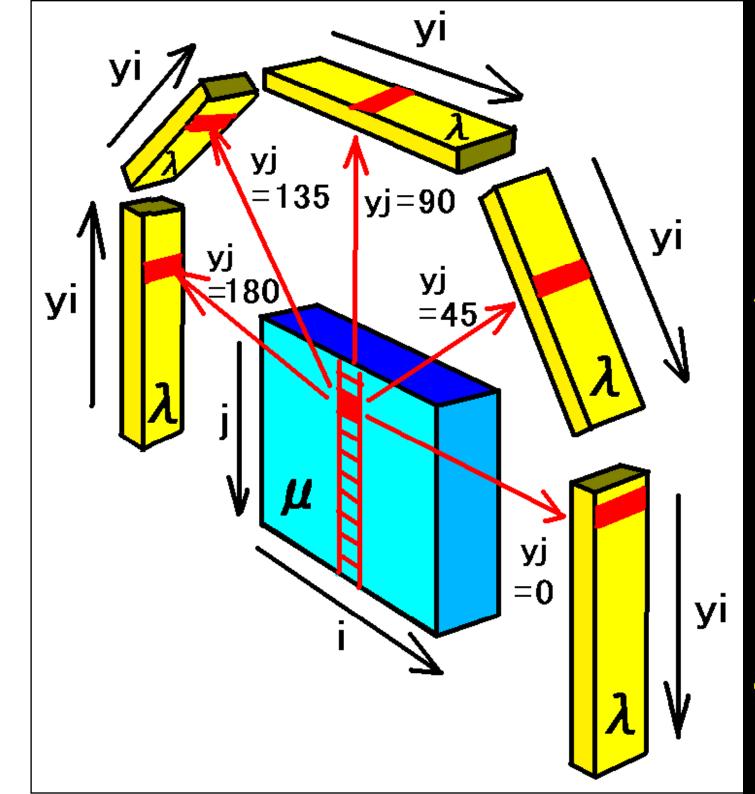
123I-IMP Brain SPECT FBP with Ramp filter Ramp Sinogram Real Space Filter

123I-IMP Brain SPECT FBP with Shepp&Logan filter









逐次近似法

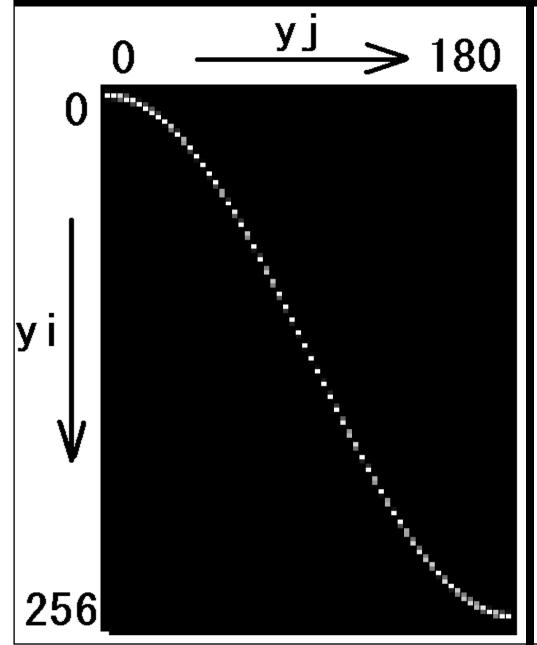
サイノグラム **\[yi] [yj]**

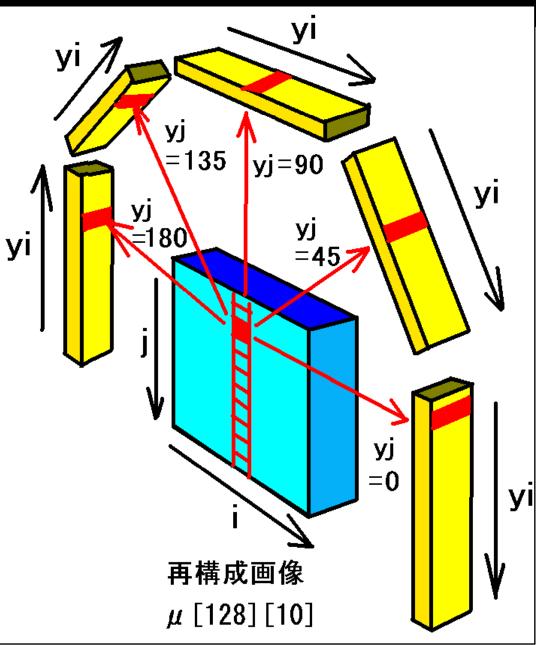
再構成画像 µ[i][j]

4次元の変数による繰り返し計算

再構成画像µの、画素 [128] [10] に対する

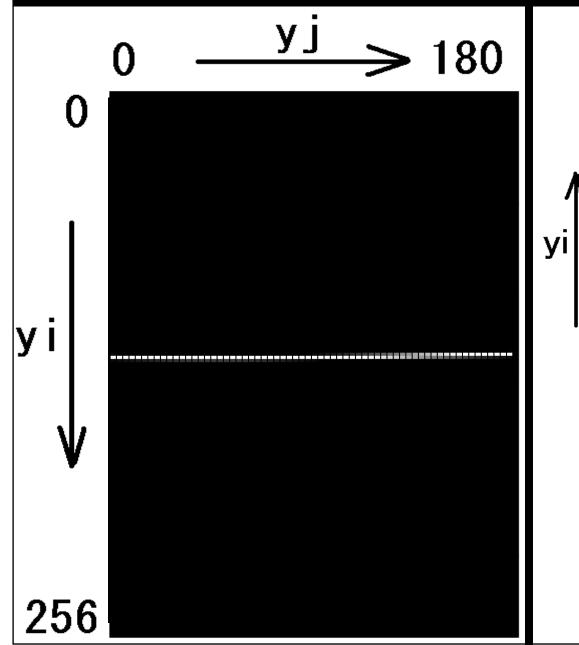
サイノグラム λ[yi][yj]への寄与率(検出確率)

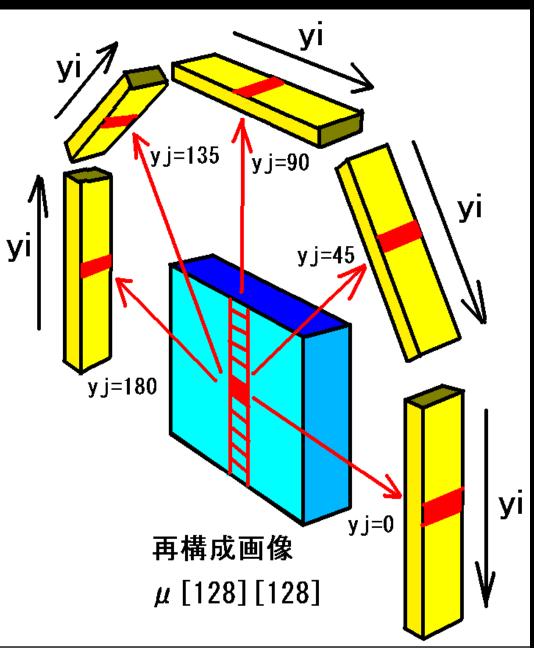




再構成画像µの、画素 [128] [128] に対する

サイノグラム A[yi][yj]への寄与率(検出確率)





再構成画像µの、画素 [i][j]に対するサイノグラムλ[yi][yj]への寄与率(検出確率)は、4次元配列 C [i][j][yi][yj]となる。

 $\lambda = \Sigma C \mu$ サイノグラム = Σ (検出確率 x 再構成画像)

正確に記述すると

 $\lambda[yi][yj] = \Sigma \Sigma C[i][j][yi][yj] \mu^{k}[i][j]$

μ^k[i][j] は、k番目の繰り返し計算後の画像

測定したサイノグラム λ と 再構成画像 μ (初期値は全画素値1) について λ λ (Σ C μ) を求める。

 $\lambda/(\Sigma C \mu)$

= 真のサイノグラム / 画像µから推定されるサイノグラム

推定画像 μ の画素値が、真の値より大きすぎると λ /(Σ C μ) は 1 未満 になる。

推定画像 μ の画素値が、真の値より小さすぎると λ /(Σ C μ) は 1 以上 になる。

 $\Sigma C (\lambda / (\Sigma C \mu)) / \Sigma C$

撮像した全方向について $\lambda/(\Sigma C \mu)$ の平均 (検出確率 C をかけた加重平均)を求める。

正確に記述すると

```
yi y j
Σ Σ C[i][j][yi][yj] (λ[yi][yj] / (ΣΣ C[i][j][yi][yj] μ<sup>k</sup>[i] [j] ))

yi y j
/ Σ Σ C[i][j][yi][yj]
```

この式の値は配列(要素数はixj)

```
k 番目の再構成画像µk の 各画素ごとに
 \Sigma C (\lambda / (\Sigma C \mu)) / \Sigma C
 の値をかけて、次の推定画像 µk+1 の画素値を算出。
 \mu^{k+1} / \mu^k = \Sigma C (\lambda / (\Sigma C \mu)) / \Sigma C
              逐次近似再構成法 MLEM、OSEM の式
正確に記述すると
\mu^{k+1} [i][j]/\mu^{k}[i][j] =
yi y j
\Sigma C[i][j][yi][yj] (\lambda[yi][yj]/(\Sigma \Sigma C[i][j][yi][yj] \mu^{k}[i][j]))
   Σ Σ C[i][j][yi][yj]
```

OSEM は、yj(サイノグラムの角度成分)の計算ループを間引いて $C(\lambda/(\Sigma C \mu))/\Sigma C$ の値を求めて、次の推定画像 μ の画素値を算出。

例えば、yj が 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の 9方向で、 subsets を 3 に設定すれば、

まず、yj=0,3,6 の値で μ^k を計算する。 次に、yj=1,4,7 の値で μ^k を基に μ^{k+1} を計算する。 更に、yj=2,5,8 の値で μ^{k+1} を基に μ^{k+2} を計算する。

計算量は MLEM の 1回繰り返しと同量だが、 MLEM を 3回繰り返した場合と同等の画像を得られる。 **OSEM**

OSEM プログラム 単純な加減乗除ばかりだが、

forループが何重も連続する。膨大な計算量。

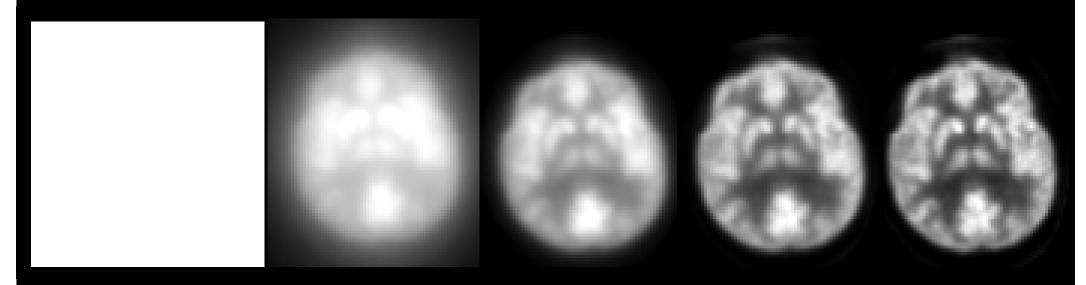
```
for(k=0;k<20;k++){
```

```
for(sub=0; sub<8; sub++) s1 = sub - 2*(int)((double)sub/2.0); s2 = 1-s1;
                      for(j=0;j<192;j++){for(i=0;i<192;i++){S_YC_CM[i][j] = SC[i][j] = 0.0;}}
                                  for(j=0;j<192;j++){ printf("\for(j=0,j<192;i++){
                                            for(yj=sub; yj<32; yj+=8){ for(yi=CZL[j][i][yj][0]; yi<=CZL[j][i][yj][1];yi++){
                                                   CM=0.0; for(jj=0;jj<192;jj++){ for(ii=CZM[yj][yi][jj][0];ii<=CZM[yj][yi][jj][1];ii++){
                                                            CM += C[ii][jj][yi][yj] * M[ii][jj][k][s1]; }}
                                                   S_YC_CM[i][j] += Yi[yi][yj] * C[i][j][yi][yj] / CM; <math>SC[i][j] += C[i][j][yi][yj];
                                     }} // yi, yj
                            }} // i, j
                             for(j=0;j<192;j++){for(i=0;i<192;i++){}}
                                                                          if(SC[i][j]>0.) M[i][j][k][s2] = M[i][j][k][s1] * S_YC_CM[i][j] / SC[i][j] ; } // j, i
       } // sub
                     for(j=0;j<192;j++){for(i=0;i<192;i++){M[i][j][k+1][s2] = M[i][j][k][s2];}} //j, i
                     Disp_M(k,s2); printf("\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}{2}n\frac{1}
}//k
```

OSEM 計算結果

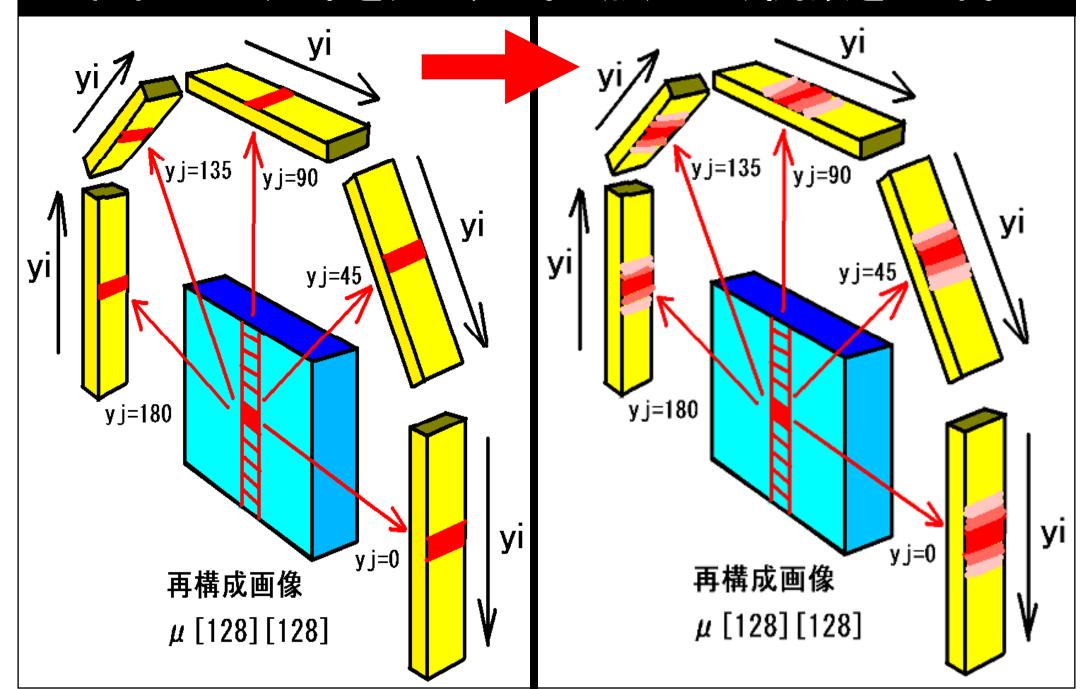
Subsets 2 繰り返し計算回数 k

$$k = 0$$
 $k = 2$ $k = 4$ $k = 10$ $k = 20$



サイノグラム (横から測定した全方向からのデータ)から、確率の高い断面像を逐次推定していく。

再構成画像µの、各画素に対するサイノグラム λ への検出確率 C の分布を広くする。 点広がり関数を加味。

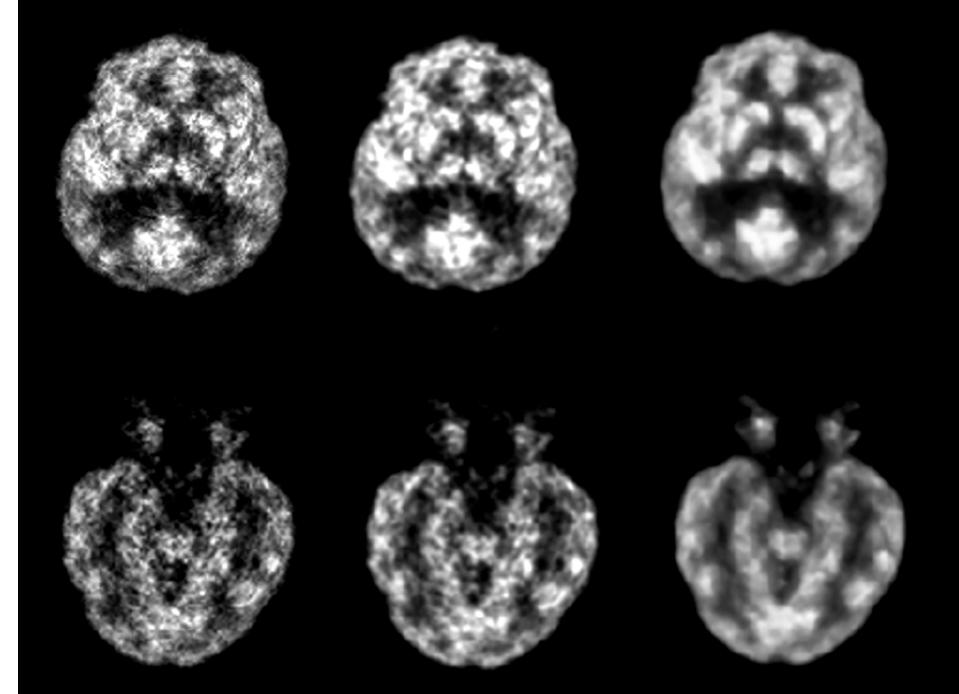


検出確率 C の分布に 点広がり関数を加味すると、サイノグラム上で 広がった分布が 再構成画像上で 点 に収束するので 分解能が向上し、ノイズが抑制される。

PVC (Partial Volume Correction)

検出確率 Cに ガウス分布 をかけて 再構成

OSEM PVC PVC+MRP



MRP (Median Root Prior)画像再構成

ベイズ(Bayes)画像再構成法のひとつ。

再構成式の中に条件式(先験確率 Prior)を加える。

$$\mu^{k+1}/\mu^k = \Sigma C(\lambda/(\Sigma C\mu))/(\Sigma C + Prior)$$

Prior は、着目する画素値µkと周辺画素の中央値 M (median)の差が 小さくなるようにµk+1 を修正する。

Median Root Prior = $\beta(\mu^k - M) / M$

Mは、周辺画素(3x3画素など)の中央値(median)。

βは、効果を調整する パラメータ(0 < β<1)。

(βがOのときは OSEMと同じ)

MRP ¹⁸F-FDG 脳PET M matrix size 3 x 3 x 3

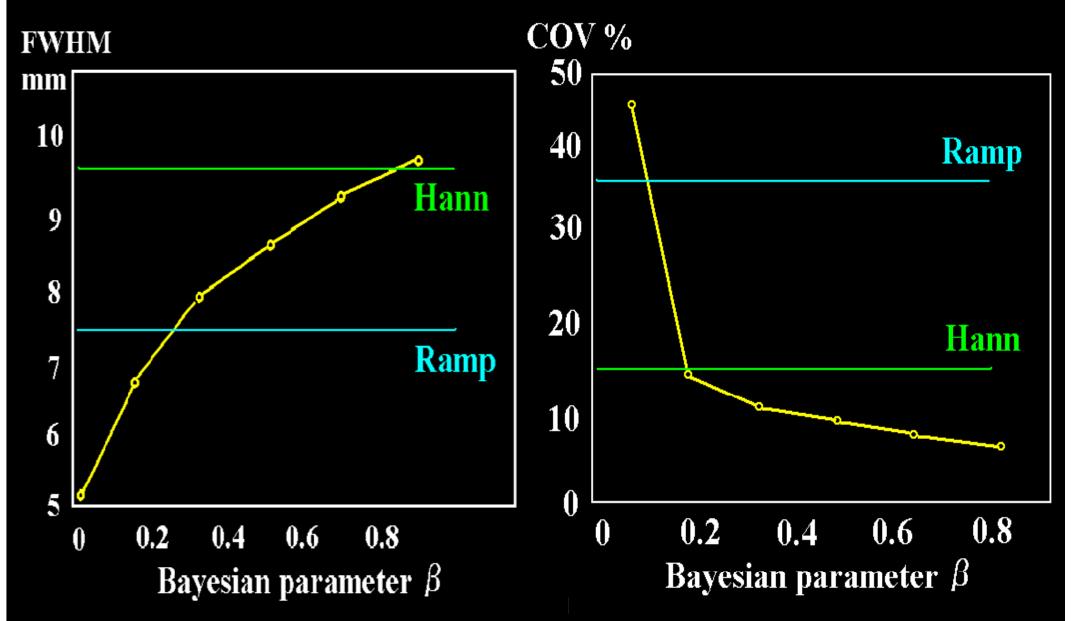
$$\beta=0$$
 (OSEM) $\beta=0.1$ $\beta=0.3$ $\beta=0.5$ $\beta=0.7$

subset 8 iteration 5

MRP 再構成法は、 画像輪郭を保ちながら 統計ノイズを抑制する。

画像の定量解析、統計解析に有効と考える。

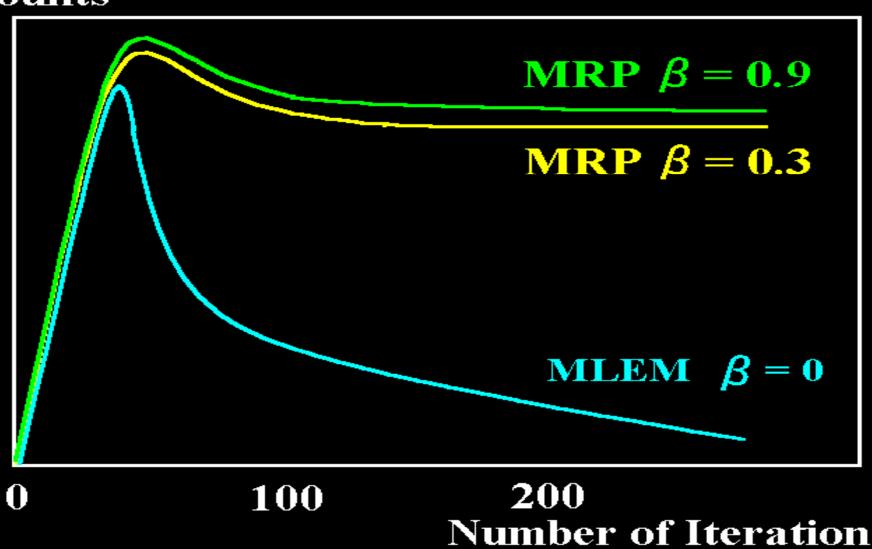
MRPは、βを適切に設定すれば、画像の変動係数 COVを抑制し、分解能をあまり劣化させない。



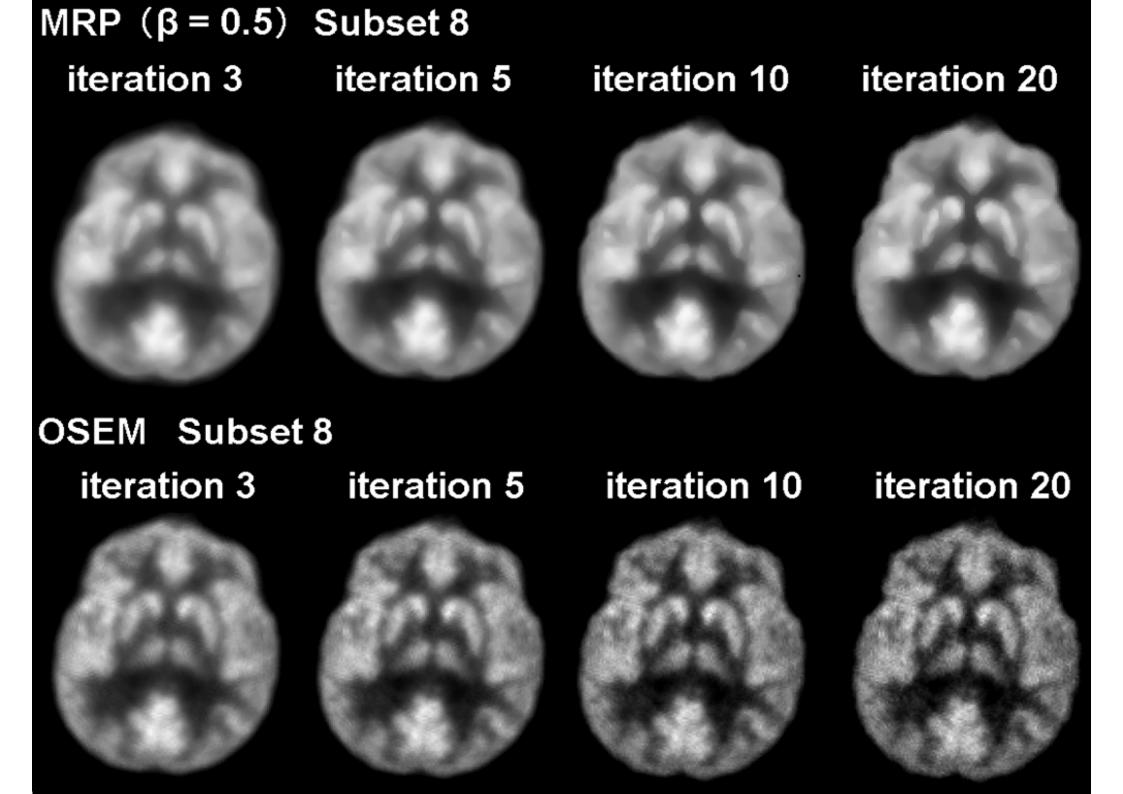
Alenius S, Ruotsalainen U. Eur J Nucl Med (1997) 24

MRP法は、繰り返し回数が多すぎても 画素値の低下が少ない(画質が劣化しない)。

Counts



Alenius S, Ruotsalainen U. Eur J Nucl Med (1997) 24



逐次近似再構成で 画像を改善させる工夫

新たな先験確率 Prior の開発

検出確率 C の修飾

被検者のトランスミッションデータを利用し 被検者内で生じる散乱成分を補正する 検出確率分布 C を作成して 画像を再構成する、など。