

# PETによる病態の定量画像化技術

北大病院 核医学診療科 加藤千恵次

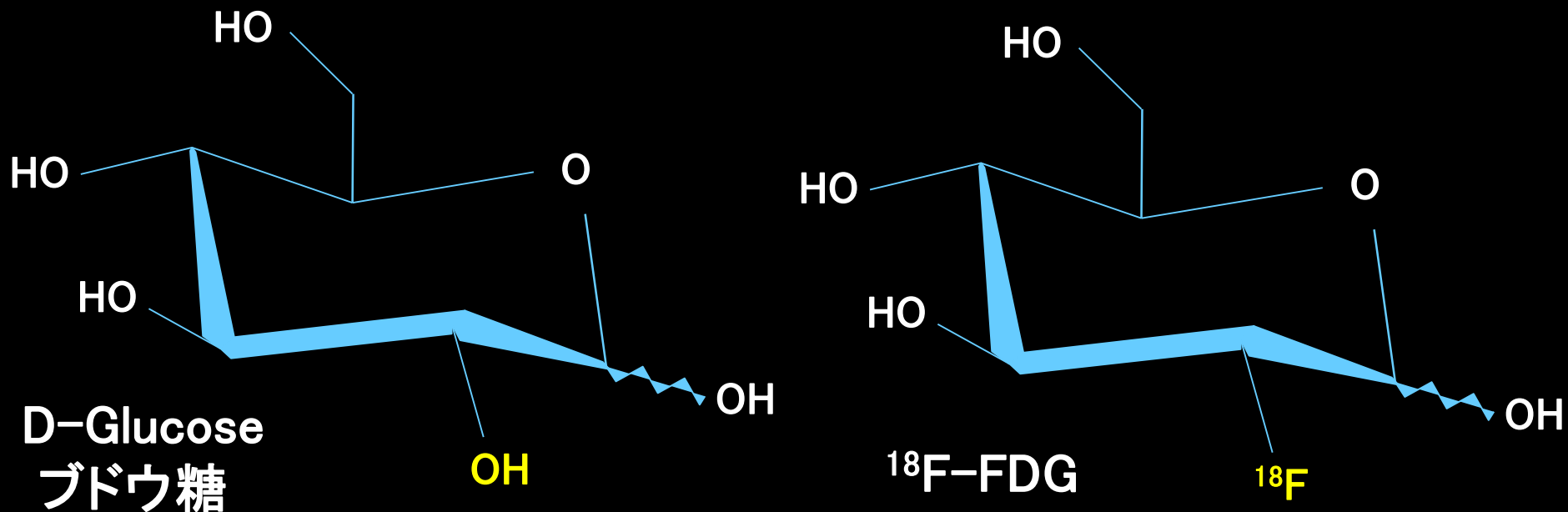
北大保健科学研究所 医理工学院

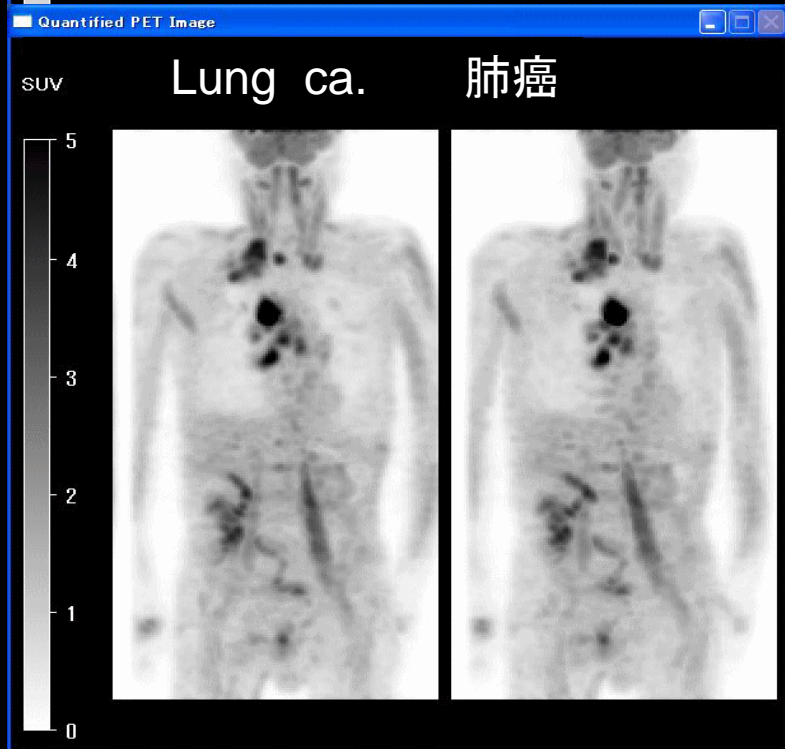
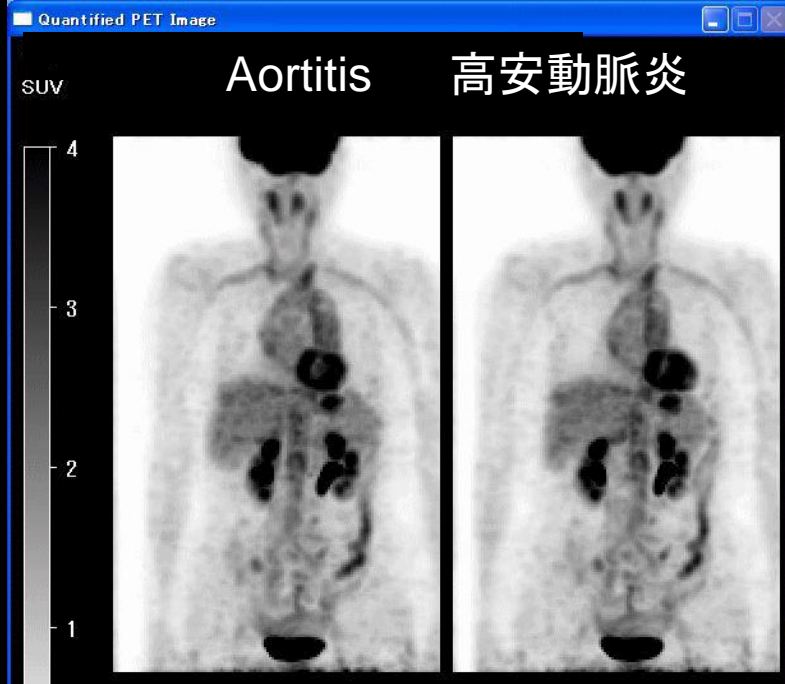
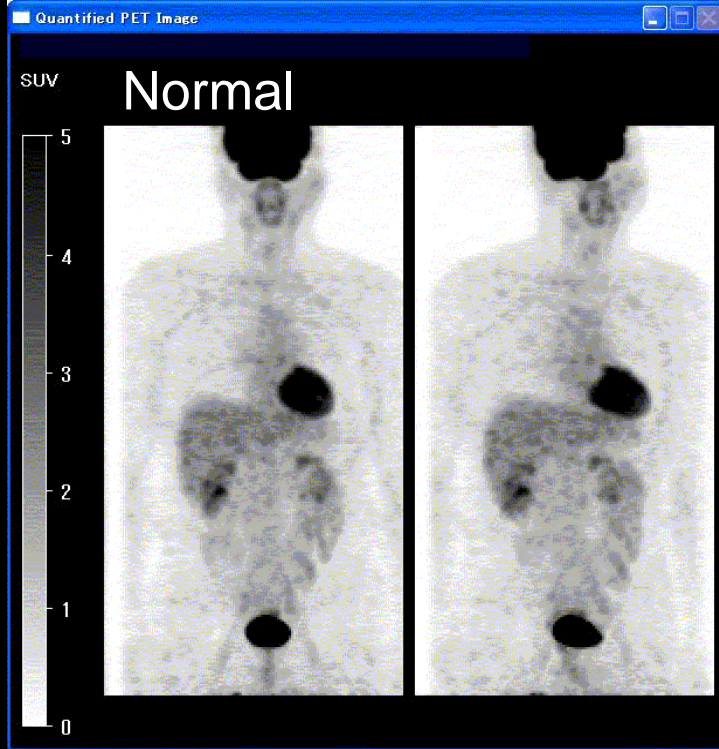
PET (Positron Emission Tomography)とは  
体内の陽電子放出核種の分布量を  
3次元、4次元に算出する

## 放射能定量測定器

- 高分解能 (画質が良い)
- 高感度
- 定量性に優れている

$^{18}\text{F}$ -FDG (Fluoro Deoxy Glucose)は、ブドウ糖の類似物質(analog)で、ブドウ糖と同様に組織に摂取されるが、代謝されない<sup>1</sup>ので組織内に長く停滞し、脳や病変のブドウ糖定量画像収集に有用な薬剤となる。  
(ただし、肝細胞、高分化型肝細胞癌には取込まれにくい。)  
(腎癌 clear cell carcinoma も FDG取込みが乏しい。)





## $^{18}\text{F}$ -FDG PET

腫瘍、炎症のほかに  
脳、尿、ときに心筋へ  
正常集積を認める。

一般的に、体内組織は、エネルギー源として**脂肪酸**を摂取し、ミトコンドリア内の**ベータ酸化回路**で**脂肪酸からATP**(アデノシン三リン酸)を産生する。ベータ酸化回路はATP産生は多いが、**酸素を多量**に要求する。

**癌細胞や炎症細胞**など、急に出現した異常組織は、酸素を運ぶ赤血球の通路である**血管が不備**なので、**酸素をあまり要求しない解糖系**でATPを産生する。解糖系はATP産生量が少ないので、普通の組織ではあまり稼働していない。

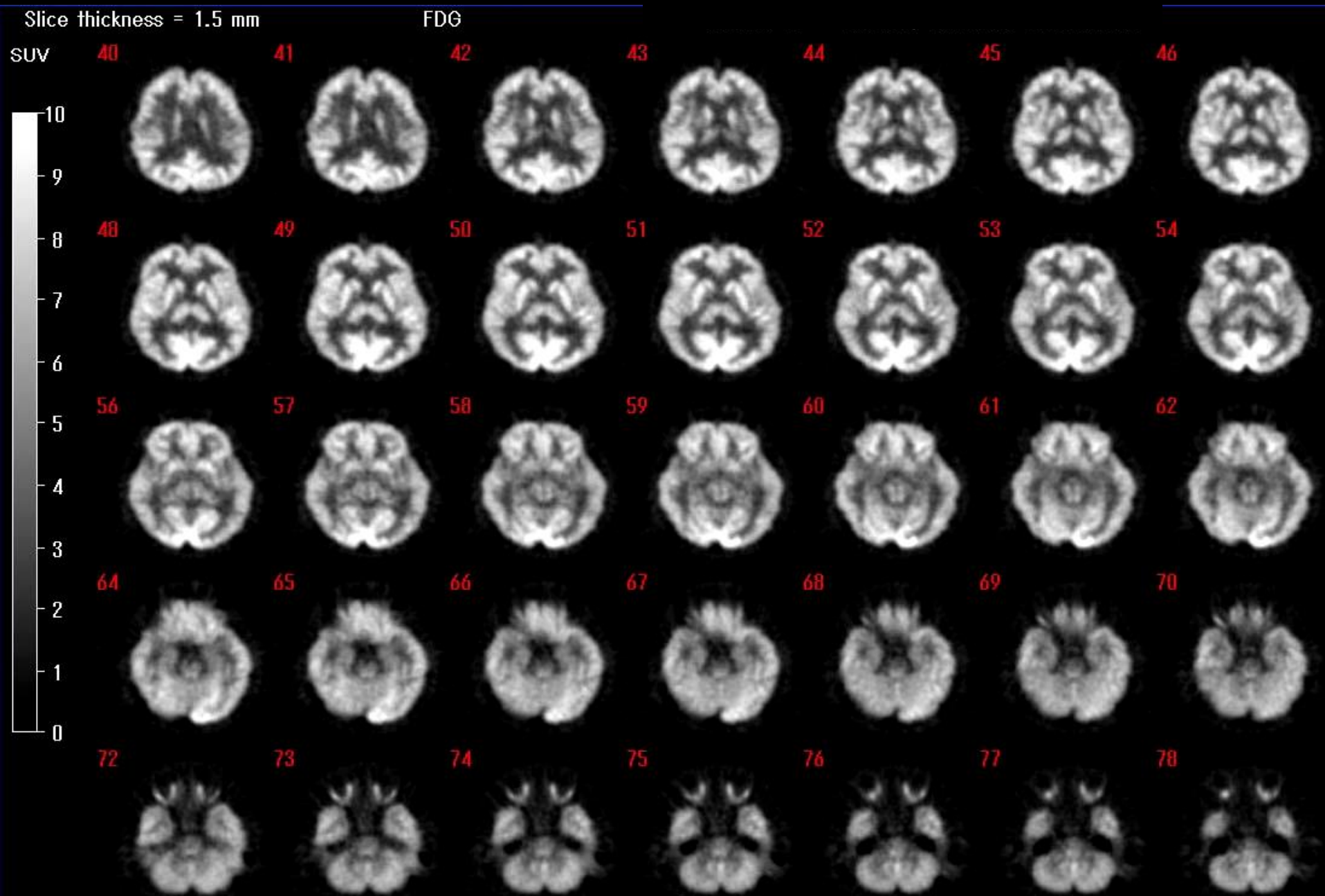
そのため、PET検査で、ブドウ糖と類似物質の放射性薬剤FDGを使うと、**腫瘍や炎症病変に集積し、さらに代謝されない**ので**病変組織内に長く停滞し、画像化**できる。

**北大病院  
核医学検査室  
PET/CT装置**



**PET:  
陽電子CT  
Positron  
Emission CT**

# $^{18}\text{F}$ -FDG Brain PET 185MBq 静注1時間後 5分撮像



# FDG-PET の健康保険適用疾患

1. てんかん（難治性、手術適応例）
2. 虚血性心疾患（viabilityの診断）  
心サルコイドーシス（致死性不整脈）
3. 悪性腫瘍（早期胃癌を除く）  
（病理診断で悪性病変と確定した症例。  
他の画像で悪性腫瘍と判断される症例。  
悪性リンパ腫の治療効果判定。  
他の腫瘍で再発転移が確定の症例。）
4. 大動脈炎 高安動脈炎、巨細胞性動脈炎  
（平成30年から）

# 高安動脈炎

指定難病(330疾患ある)の一つ。登録患者 7000人  
(原因不明疾患に対する医療費補助制度がある)  
平成30年4月から FDG PET の保険適用。

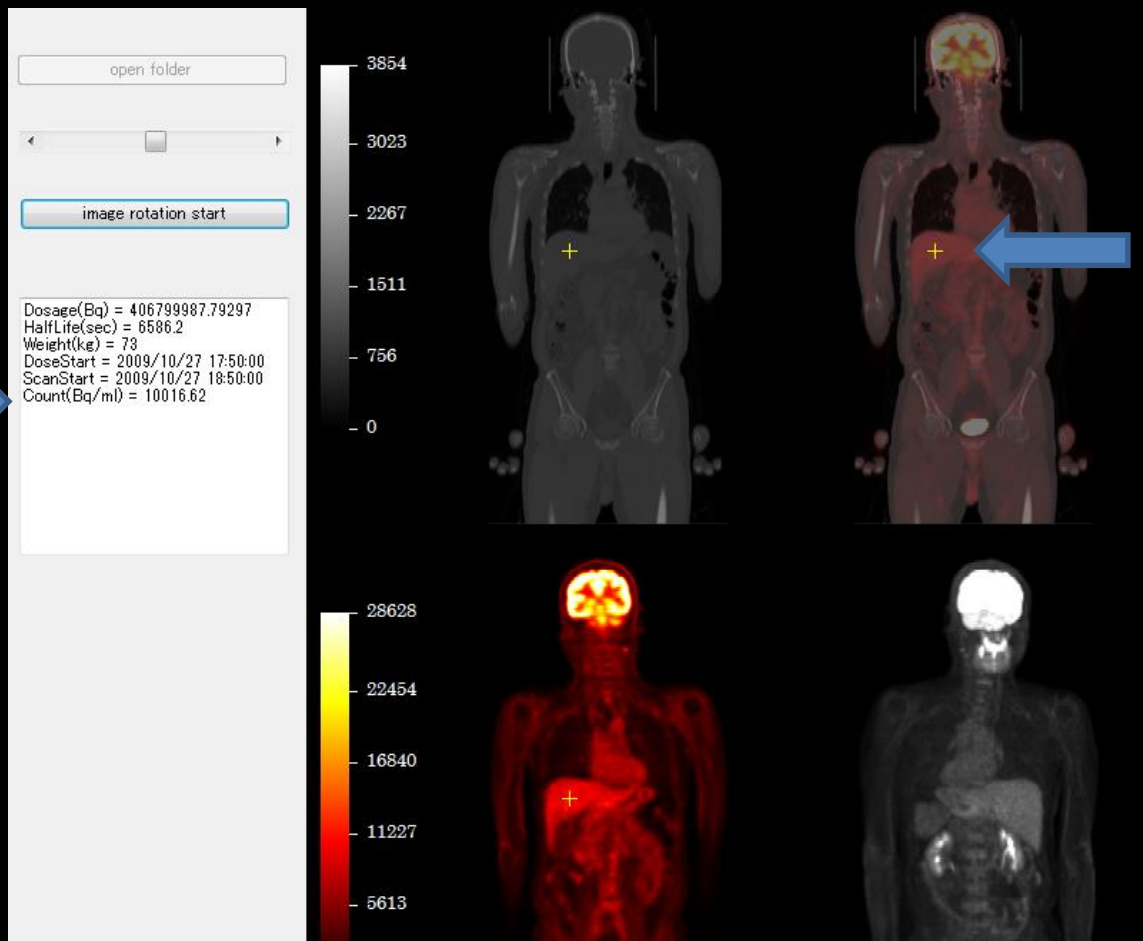
9割が女性。好発年齢は10~30才。若年女性。

若年女性で重症の頸部痛、頭痛、肩凝りの症例で、  
CT等で大動脈弓の分枝血管に狭窄等の所見、  
左右上肢での血圧測定値に左右差などあれば、  
FDG PET/CT実施を。炎症血管にFDG集積あり。

治療法は、ステロイド(減量すると再燃しやすい)、  
抗体医薬(トリシズマブ(アクテムラ) IL-6R)  
(本来は関節リウマチ薬。高価。5000円/日)



CT・PET・fusion画像のいずれかをクリックすると、その部位の集積が表示される。クリックした点は黄色十字で示される。



クリックした  
部位

クリックした  
部位のカウント

FDG-PET画像から病変の SUV を算出する。

# SUV (Standardized Uptake Value)

病変の放射能濃度 (Bq/ml)

=

体内平均放射能濃度 (Bq/ml)

( 投与量 (Bq) / 体重 (g) )

分子と分母の放射能は時刻を合わせる  
(半減期補正をする)必要がある。

病変の放射能濃度が体内平均の何倍か  
を示す半定量値。 正常値は 1。

2.5~3以上を病的集積と考える。

# 半減期 Half life $T_{1/2}$

$$N = N_0 \times (1/2)^{(t / T_{1/2})}$$

崩壊定数  $\lambda$

1秒間に原子核が崩壊する割合

$$dN/dt = -\lambda N$$

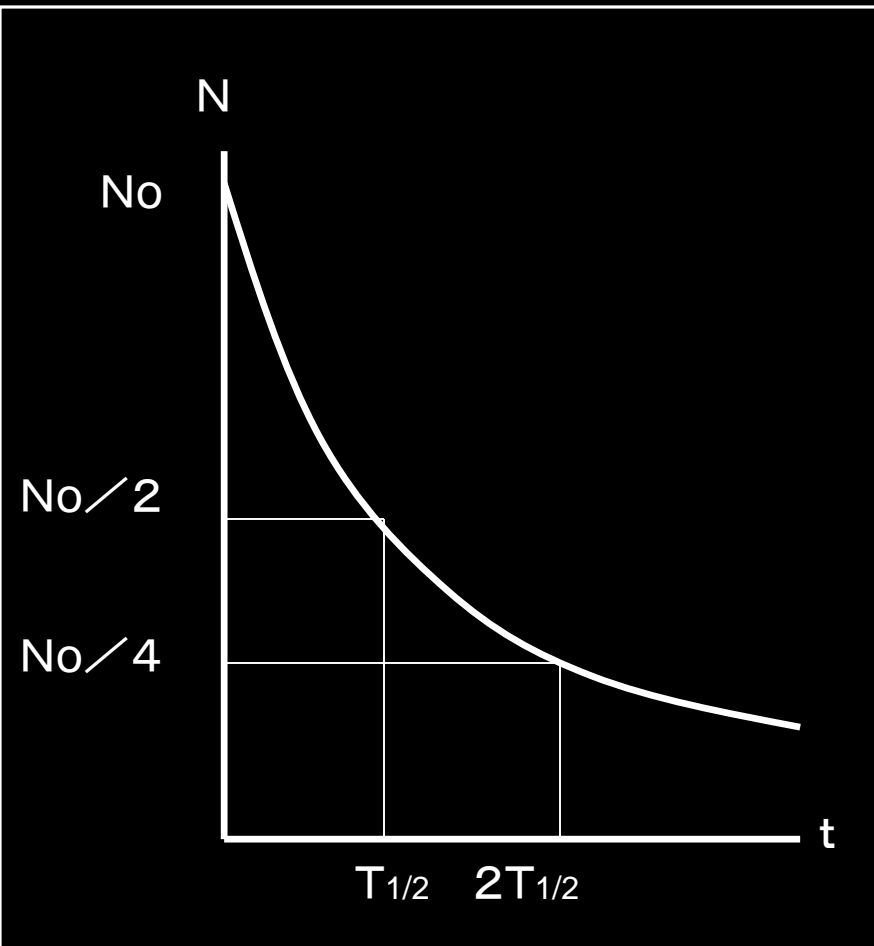
$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$1/2 = e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$\text{Log}(1/2) = \text{Log}(e^{-\lambda T_{1/2}})$$

$$\text{Log}2 = 0.693 = \lambda T_{1/2}$$



10時に200 MBqであった $^{18}\text{F}$ -FDGを10時55分に患者に投与した。  
11時50分に撮影を開始し、13時40分に解析を行ったところ、  
病巣部の放射能測定値は $12,000 \text{ Bq/cm}^3$ であった。SUV値はどれか。  
ただし、患者は身長150 cm、体重50 kgとし、人体の密度を $1 \text{ g/cm}^3$ 、  
 $^{18}\text{F}$ の物理的半減期を110分とする。

1. 3            2. 6            3. 9            4. 30            5. 60

撮像開始時刻の11時50分における放射能を計算する。

患者体内の放射能は、 $200 \times (1/2) = 100 \text{ MBq}$

体内平均濃度は、 $100 \text{ MBq} / 50 \text{ kg} = 2000 \text{ Bq} / \text{ml}$

病変のSUVは、 $12000 / 2000 = 6.0$  (倍)

(SUVに定量的単位はない。SUVは半定量値である。)

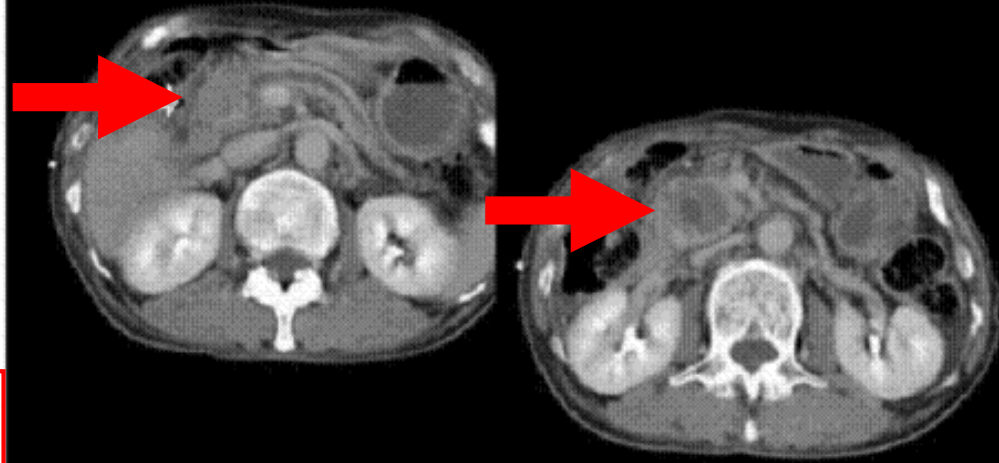
膵頭部癌 Panc. head ca.

食後に実施した FDG PET  
では、病変部の SUV 2.2  
空腹時に再検査して  
SUV 3.4 に上昇。

FDG-PETは、空腹時に行う。

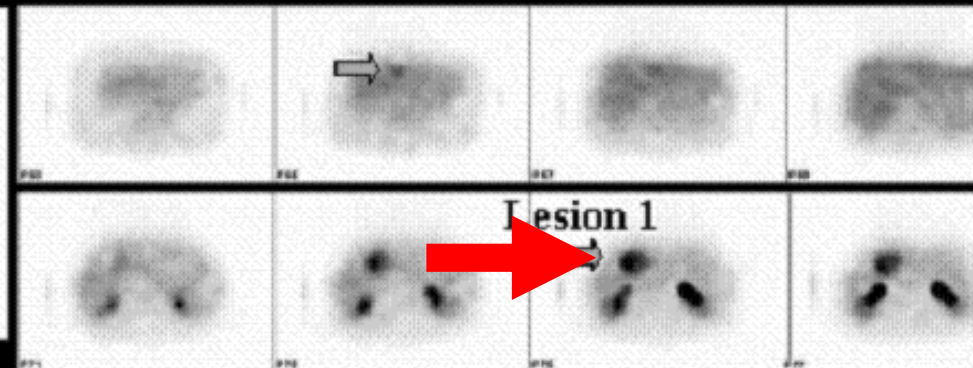
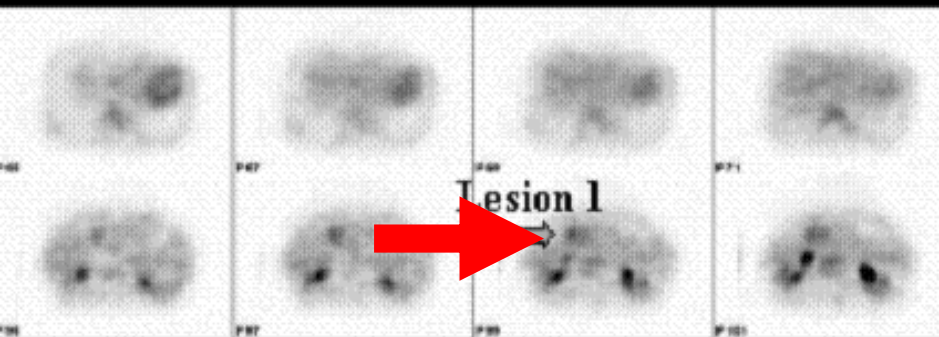
症例3

腹部造影CT



症例3: FDG-PET(1回目)

症例3: FDG-PET(2回目)



SUV 2.2 Lesion1 5029Bq/ml

SUV 3.4 Lesion1 8251 Bq/ml

前処置: 検査3時間前に食事(just after meal).  
検査時血糖 BS 167mg/dl

前処置: 検査前夜より絶食(fasted all night).  
検査時血糖95mg/dl

$^{18}\text{F}$ -FDG PET 検査では、検査 6 時間前から患者に絶食および甘味飲料の中止を依頼するが、それが守られなかった状態で実施した  $^{18}\text{F}$ -FDG PET 検査は、どのような問題点が生じるか。

FDG の薬理的性質を基にして説明せよ。

$^{18}\text{F}$ -FDG はブドウ糖の類似物質である (2 点)。腫瘍や炎症病変にはブドウ糖が集積するので、類似物質の  $^{18}\text{F}$ -FDG も集積する。しかし絶食の前処置が守られないと  $^{18}\text{F}$ -FDG 投与時に患者血中のブドウ糖が多くなる (高血糖) (2 点)。高血糖状態では、腫瘍や炎症病変にはブドウ糖が多量に集積し、病変への  $^{18}\text{F}$ -FDG 集積量が減少するので (競合が生じる) (2 点)、PET 画像で病変の描出が低下し、SUV も低下するため (2 点)、病変の診断が困難になる (2 点)。

# ガンマカメラ

体内のガンマ線放出薬剤の  
分布(シンチグラム)を  
撮像する装置



# 骨シンチグラフィ

## Bone scintigraphy

リン酸にガンマ線放出RIを  
標識した薬剤の分布図。  
骨転移に強く分布。

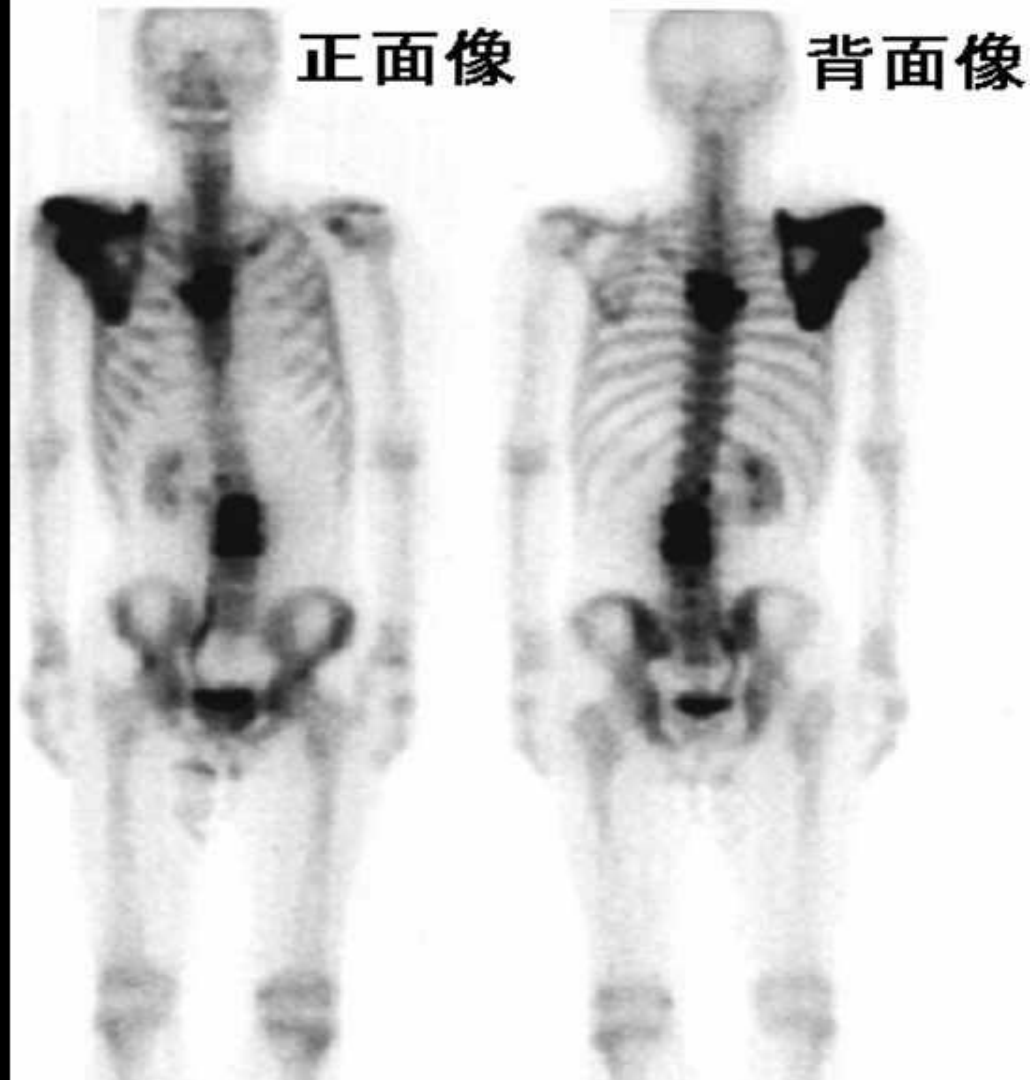
肺癌の骨転移症例。

右肩甲骨、胸椎、腰椎

## Bone metastases

尿中への排泄が多いので

尿路、膀胱が描画されている。

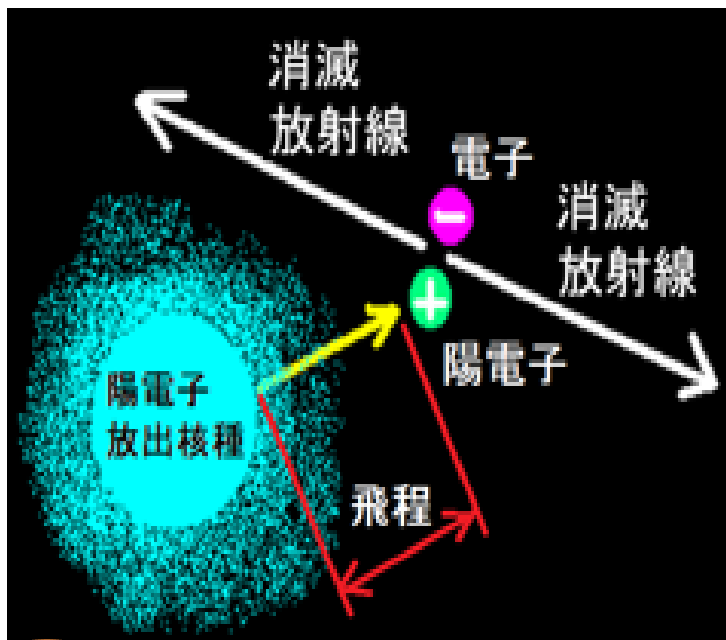


正面と背面のカメラで撮影した像が異なる理由は、人体がガンマ線を吸収、散乱させているため。体表から深い部位ほど描画が薄い。



## 電子対消滅 (annihilation)

陽電子放出核種から陽電子が出ると、数mmの飛程を経て電子と衝突して消滅し、1対の511 keVの消滅放射線が反対方向に放出される。陽電子と電子は同じ質量で、それが消滅する際に  $E=mc^2$  の式に電子質量を代入すると得られる値 511 keV の光子 (消滅放射線) を出す。



原子核内から生じる電磁波をγ線、原子核外軌道電子の遷移で生じる電磁波をX線というが、消滅放射線はどちらにも該当しない電磁波である。

陽電子は電子の反粒子で、正電荷とマイナスのエネルギーを持つ。エネルギーと電荷が正負反対の電子と陽電子が出会うと消滅し、消えた質量と等価の電磁波エネルギーに換わる。電磁波に質量はないがエネルギーを持つので運動量を持つ。運動量保存則から、発生した電磁波は反対方向に飛ぶ。この現象の正確な理解には量子力学と相対性理論の知識が必要である。

**放射線 (Radiation) は、2種類ある。**

**1. 電磁波 ( X線、ガンマ線 )**

**= 空間の振動エネルギー**

**2. 粒子線 ( 電子線、陽電子線 など )**

**= 高速に飛ぶ粒子 (質量をもつ)**

**X線、ガンマ線より人体への影響が大きい**


**放射能 (Radio-activity) とは、**

**1秒間に放出される放射線の数。**

**放射能の単位は ベクレル (Bq)。**

電磁波とは電場と磁場の相互振動と説明されるが、空間の振動エネルギーである。マクスウェルは電磁波の真空中での速度  $c$  を  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  と導いた。この値は秒速約30万kmとなる。 $\mu_0$ は真空の透磁率（磁場の生じやすさ）、 $\epsilon_0$ は真空の誘電率（電場の生じやすさ）である。真空つまり空間に何らかの物理的構造が無ければ $\mu_0$ や $\epsilon_0$ は0のはずであり、マクスウェルの式にその値を入れると電磁波速度  $c$  は無限大になり、事実と矛盾する。

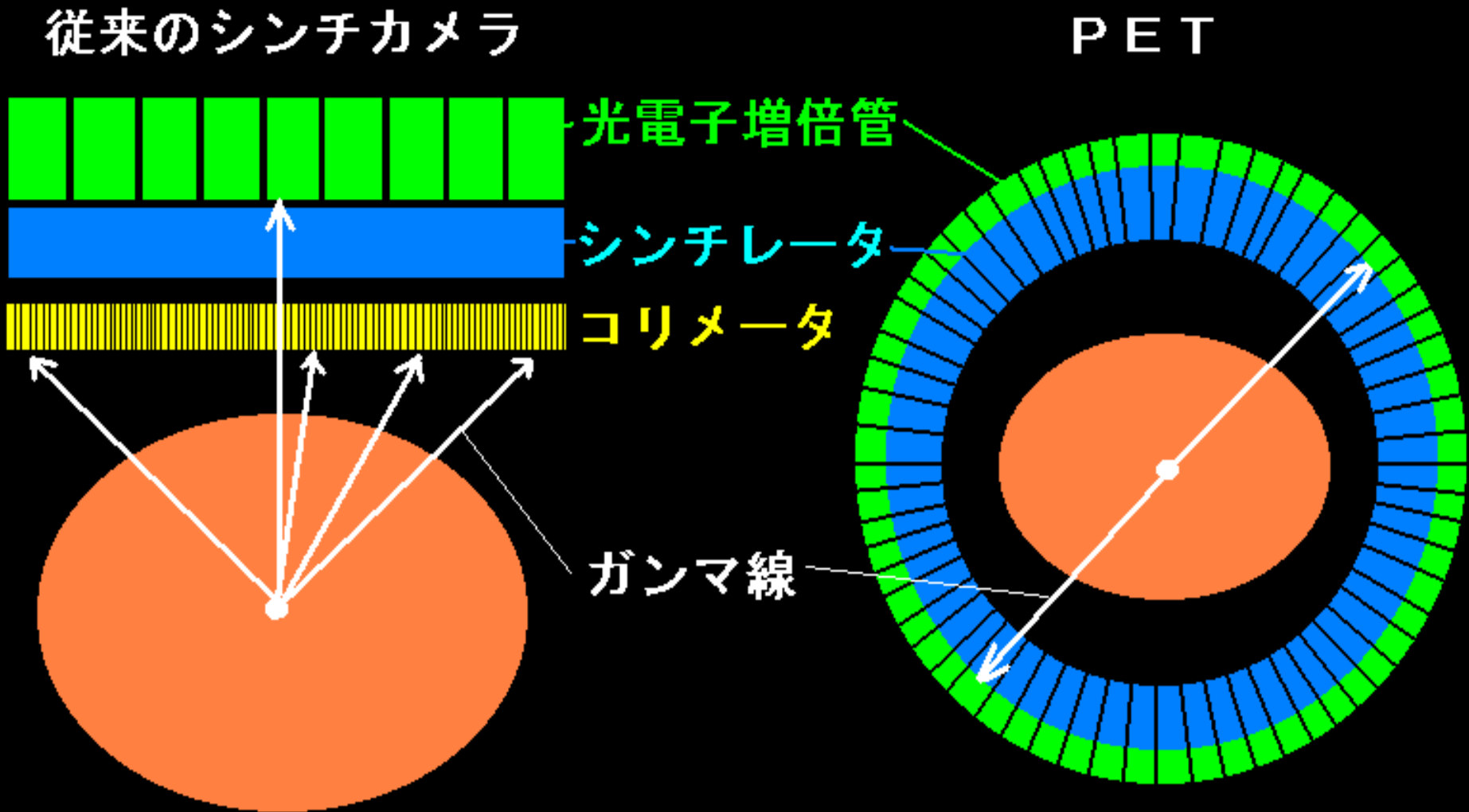
空間には誘電率と透磁率をもつ何らかの物理的構造があり、その構造の振動が電磁波と考える。空間の存在するところを宇宙、宇宙空間という。近年では、空間は10次元以上の構造であるとも報告されており、今後の物理学者や天文学者の研究に期待したい。



光子 photon とは、質量が 0 の空間中のエネルギーの塊と解釈される。光などの電磁波エネルギーの粒子性は、アインシュタインやコンプトンらによって確かめられた。日常的にも、何万光年も離れた星が夜空で見える現象は、光の粒子性つまり光子の存在を認めなければ説明ができない。光が単なる波動であれば、星から出た光の波動は何万年も宇宙空間で広がりながら進み、地球に届く光のエネルギーは著しく弱くなり、我々には遠くの星は見えないはずである。

PETカメラは、コリメータがないので高感度。

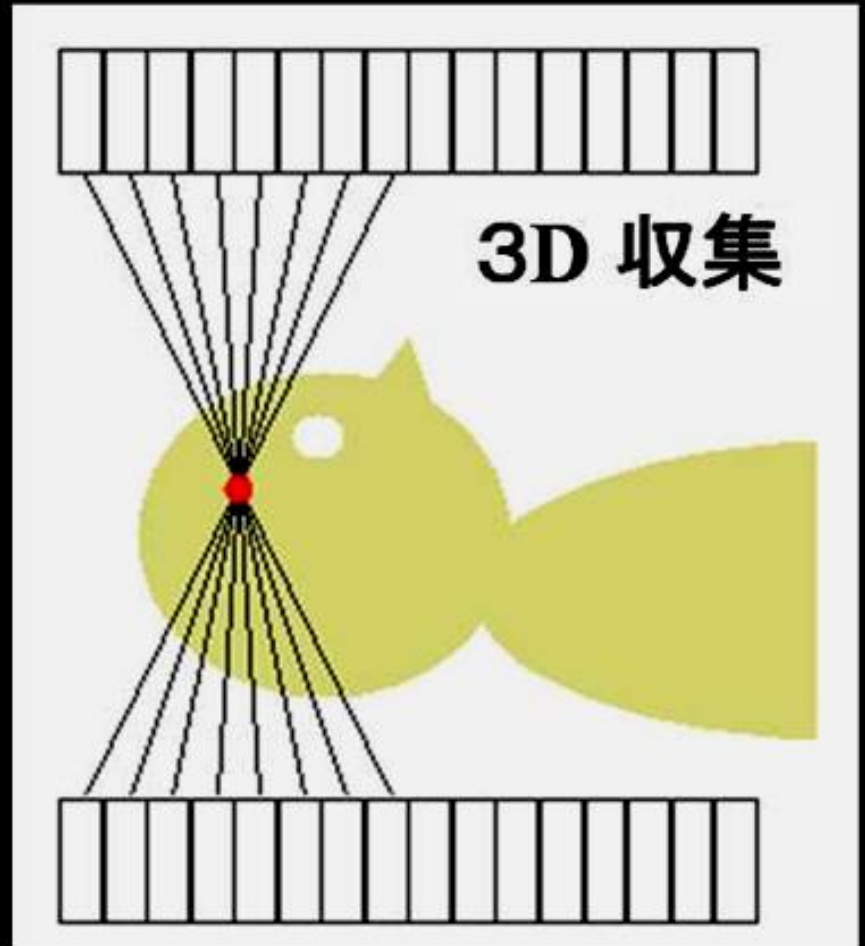
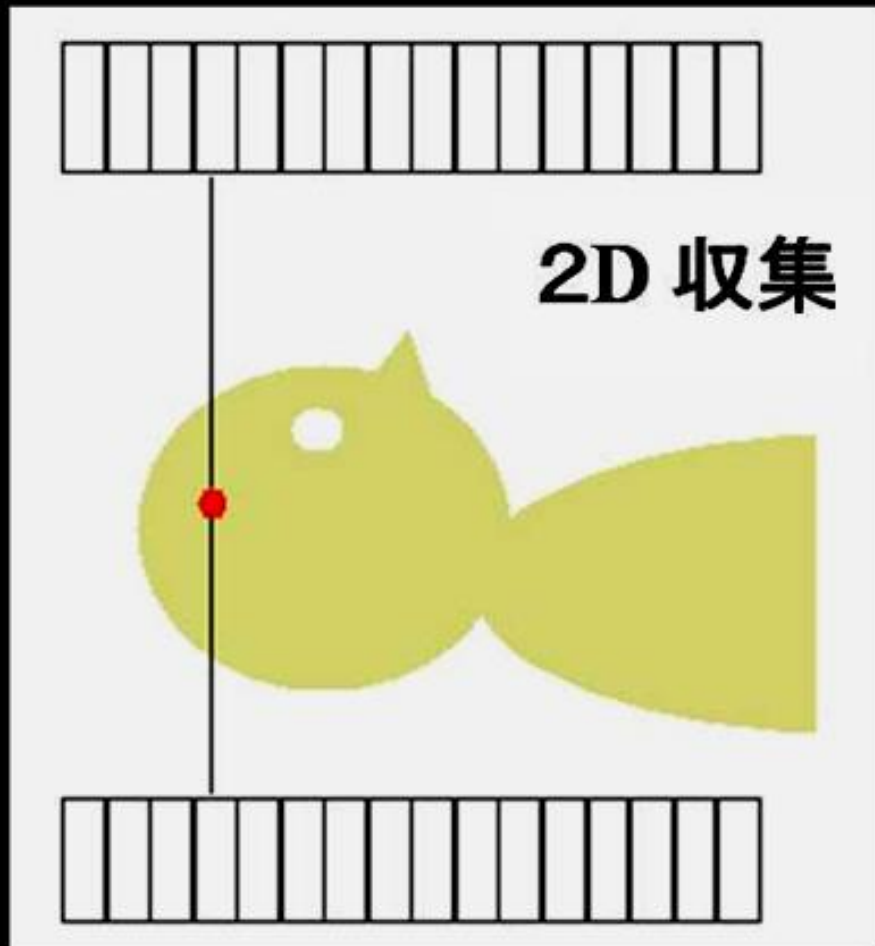
コリメータは小さい孔を多数あけた鉛板。検出感度を下げる。



# 現在のPETはほとんど3次元(3D)収集

2次元(2D)収集と比べ、短時間で良好な画像を収集できる  
(全身(頭部~大腿部)を15~20分程度で収集)。

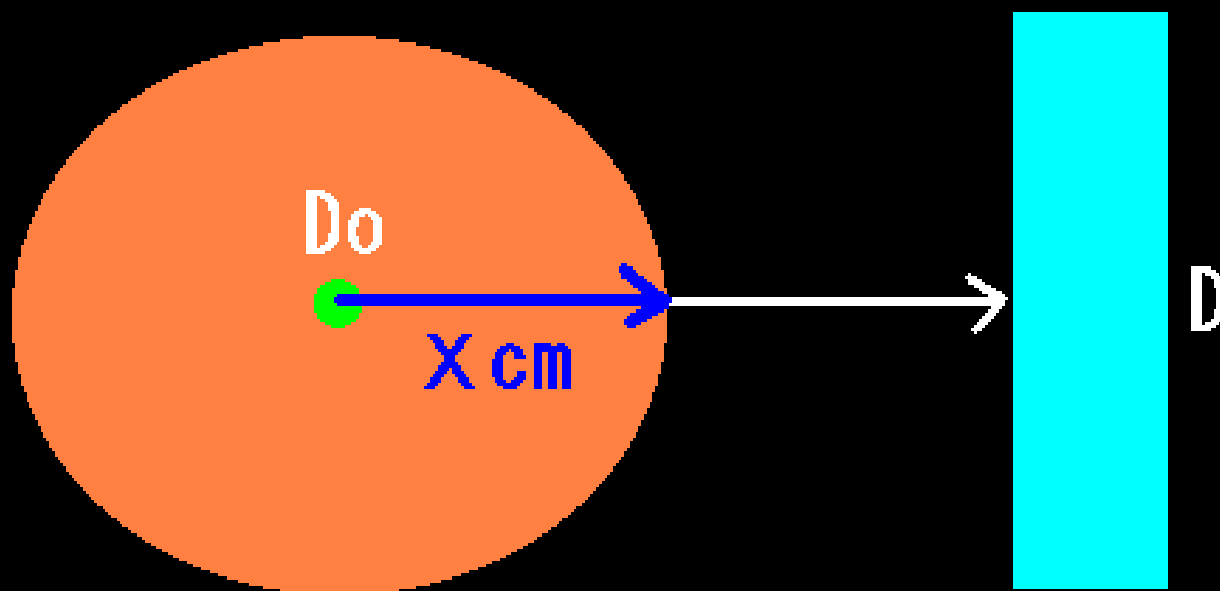
コンプトン散乱線を収集しやすく、定量性の精度が低下する。



従来のカメラでは体内の放射能分布の定量が困難

## 放射能の体内での減弱

$$D = D_0 \exp(-\mu x)$$



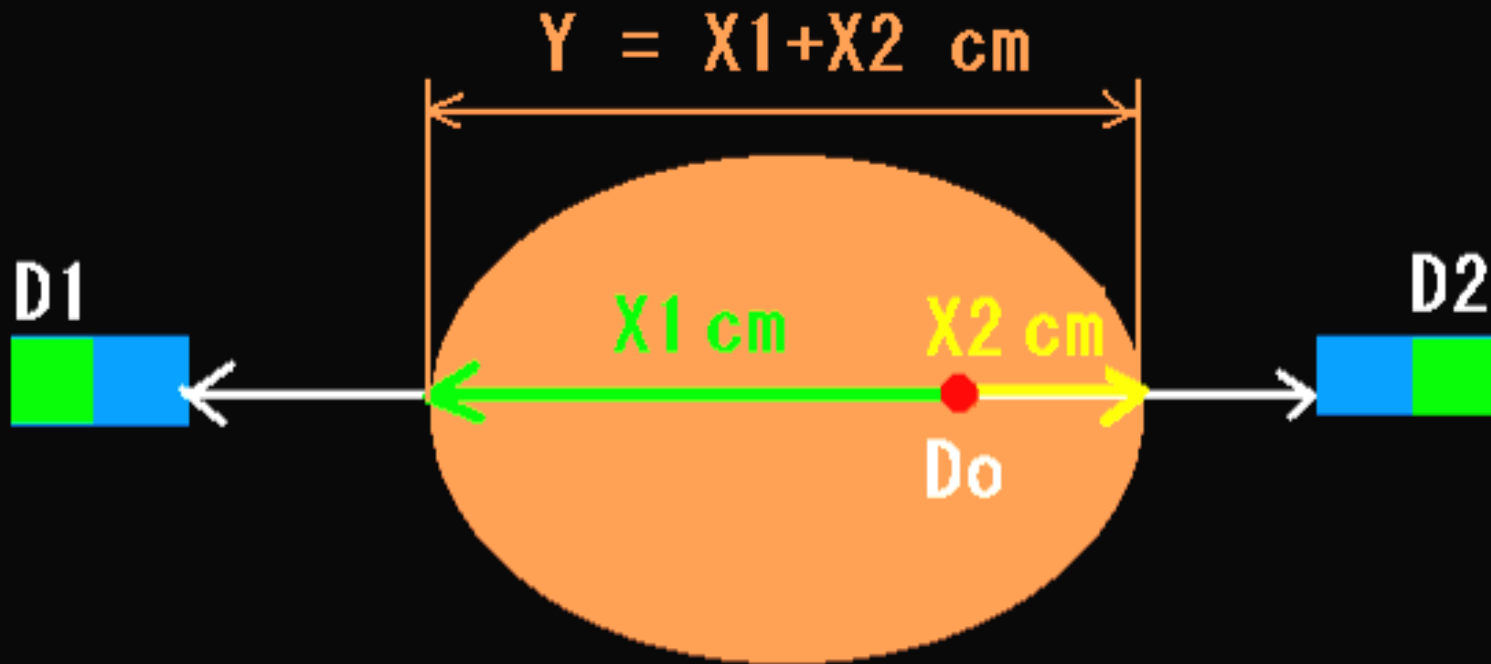
シンチカメラ

$D_0$  : 真の放射能 (Bq)

$D$  : 放射能測定値 (Bq)

$\mu$  : 線減弱係数 (/cm)

PETは、CT画像で吸収補正を行うので  
定量性が良い。



$$D_1 = D_0 \exp(-\mu X_1)$$

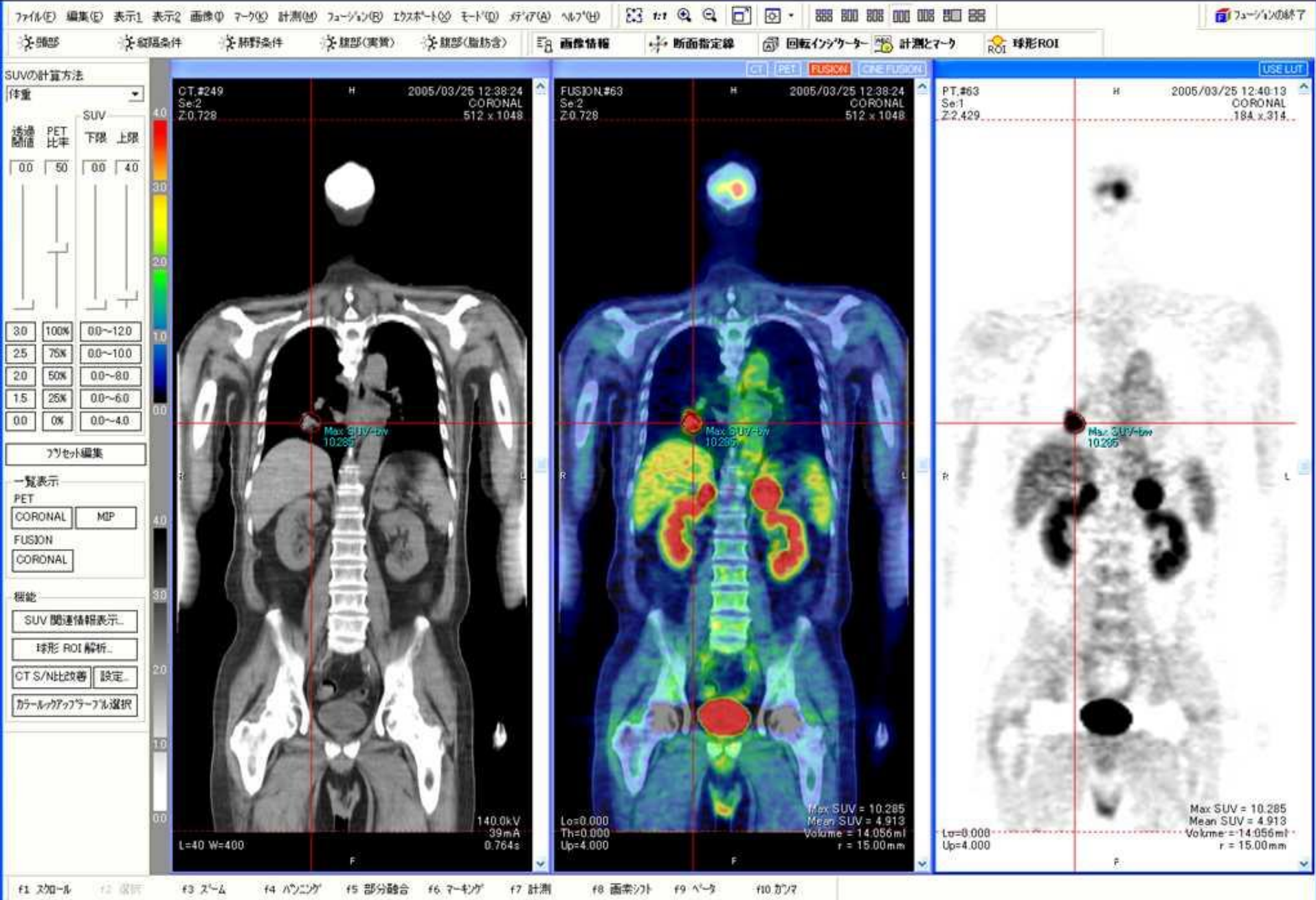
$$D_2 = D_0 \exp(-\mu X_2)$$

$$D_1 D_2 = D_0 D_0 \exp(-\mu (X_1 + X_2))$$

$$D_0 = \sqrt{D_1 D_2 \exp(\mu Y)}$$



# PET/CT画像 Lung ca.



CT値（HU：Hounsfield Unit）

組織の密度に比例する値

CT断層像の画素値の基になる値は体内の各組織の線減弱係数  $\mu_t$  だが、臨床的な理解度を容易にするために  $\mu_t$  に比例した値がCTの画素値に使われる。

$$\text{CT値} = 1000 \times (\mu_t - \mu_w) / \mu_w$$

$\mu_w$  : 水のX線吸収係数（線減弱係数）

$\mu_t$  : 組織のX線吸収係数（線減弱係数）

## 空気のCT値は -1000

$$1000 \times (\mu_{\text{air}} - \mu_w) / \mu_w = -1000 \text{ (HU)}$$

厳密には空気の線減弱係数  $\mu_{\text{air}}$  は0ではないが、水や人体組織と比べると極めて小さい値なので、CT値を計算する場合は  $\mu_{\text{air}} = 0$  とする。

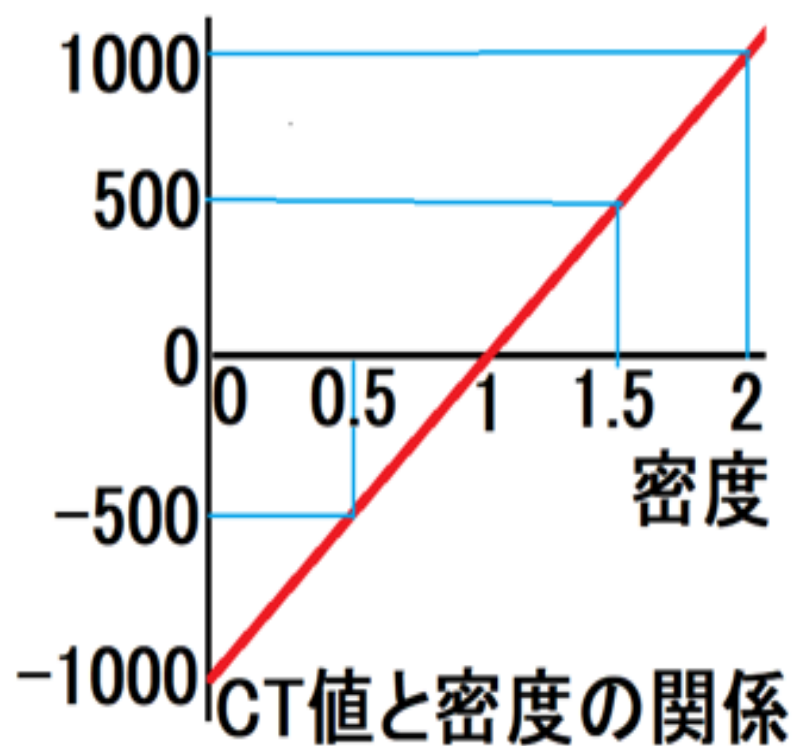
## 水のCT値は 0 (比重1の密度が 0 HU)

$$1000 \times (\mu_w - \mu_w) / \mu_w = 0 \text{ (HU)}$$

水の2倍の線減弱係数の物質のCT値は 1000  
(水の2倍の密度が 1000 HU)

$$1000 \times (2\mu_w - \mu_w) / \mu_w = 1000 \text{ (HU)}$$

## CT値 (HU)



CT値は体内の密度(比重)を表す数値である。

肺野のCT値が約-800で、密度は0.2、肺気腫の症例では、肺野が黒っぽく見えるが、CT値が約-900で、密度が0.1程度に低下していることを示す。

血液のCT値は約60だが、これは密度(比重)が1.06であることを示す。

造影剤で白く見える血液のCT値は、約100から200を示すが、造影剤によって血液の密度が1.1から1.2程度に重くなっていることを示す。

北大医学部 加藤千恵次 [北大病院 核医学診療科](#)

大学院医学研究科 [PETIによる病態の定量化](#) [断層画像再構成の原理](#)

医学科 核医学 [PET, SPECTの原理](#) [エンパトメントモデル解析](#)

保健学科

保健学科2年 保健医療概論 [原子力発電所事故が人体に与える影響](#)

[医療従事者の被曝について](#)

放射線技術科学専攻

[核医学総論](#) [核医学検査技術学](#)

[核医学検査技術学実習](#)

[放射化学基礎](#)

[放射線関係法規](#)

[医用画像機器工学II \(CT\)](#)

[医用画像機器工学実習 \(FBP, OSEMの原理\)](#)

[核医学機器工学概論](#) [プログラミング言語C](#)

[C#講座](#) [C#講座サンプルプログラム](#) [プログラミング言語C#](#)

[C言語からVisual C#への移行](#) [DICOMから情報を読み出す](#)

検査技術科学専攻

[医療情報科学](#) [医用工学](#)

# Take home message

## ホームページ

[chtgkato.com](http://chtgkato.com) で

詳細な核医学機器の原理、

CTの断層画像作成原理、

脳血流など定量解析理論  
などを説明したスライド、

画像解析プログラムなどの

説明を載せています。

興味のある人は参照して  
下さい。

# PETで使用する陽電子放出核種

## 病院内のサイクロトロンで産生する

|       |      | 半減期(分) | 合成放射性薬剤   |
|-------|------|--------|---|
| 酸素15  | 15-O | 2分     | O <sub>2</sub> , CO, CO <sub>2</sub> , H <sub>2</sub> O |
| 窒素13  | 13-N | 10分    | NH <sub>3</sub>   |
| 炭素11  | 11-C | 20分    | 11C-酢酸, 11C-メチオニン                                       |
| フッ素18 | 18-F | 110分   | FDG, FDOPA  |

## 従来の検査で使用する放射性同位元素の半減時間

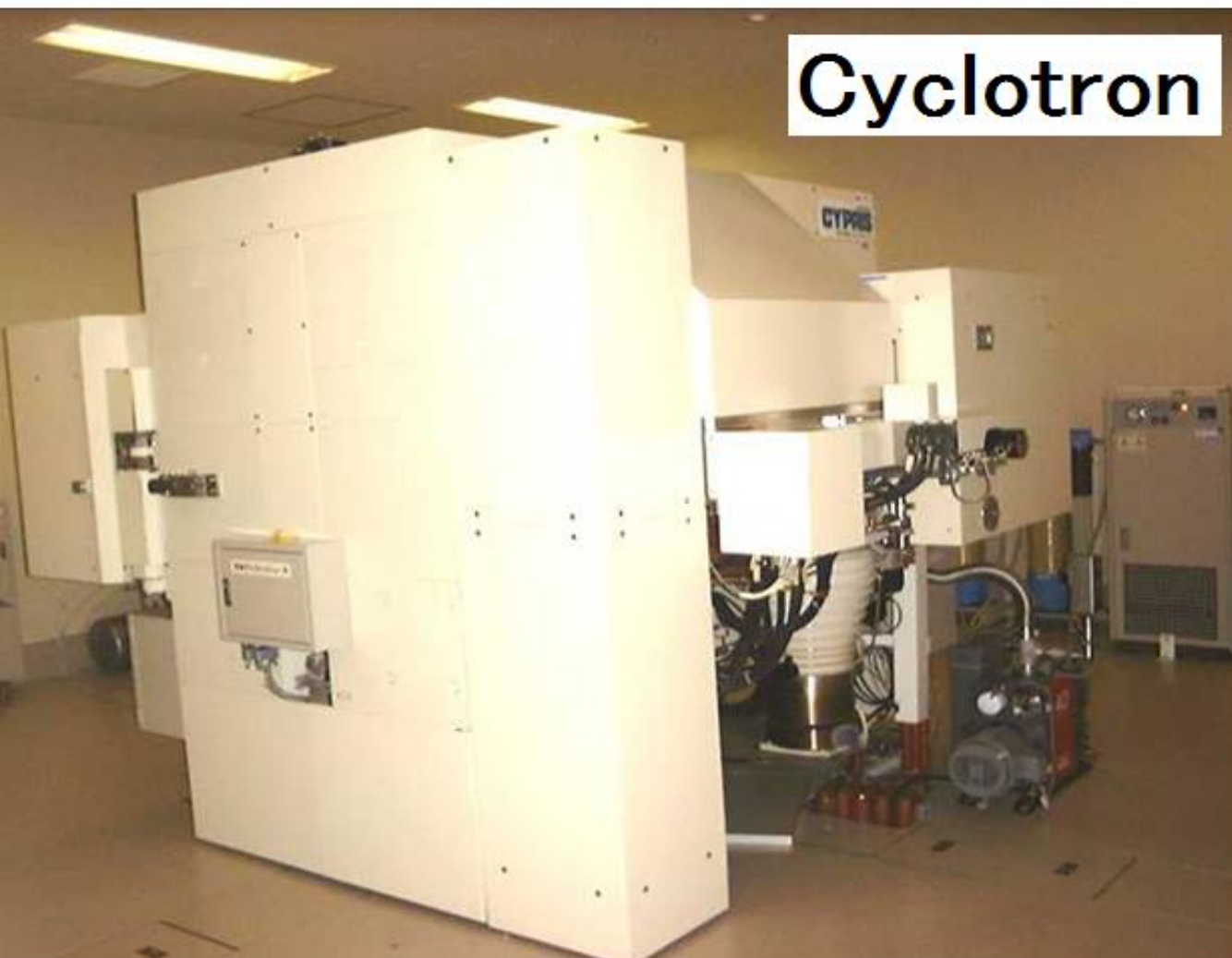
99m-Tc 6.01 時間

67Ga 78.2 時間 (3.2日)

201Tl 72.9 時間 (3.0日)

$^{18}\text{F}$  110 min  
 $^{15}\text{O}$  2.04 min  
 $^{11}\text{C}$  20.4 min  
 $^{13}\text{N}$  9.97 min

$^{18}\text{O}(\text{p},\text{n})^{18}\text{F}$   
 $^{14}\text{N}(\text{d},\text{n})^{15}\text{O}$ ,  $^{15}\text{N}(\text{p},\text{n})^{15}\text{O}$   
 $^{14}\text{N}(\text{p},\alpha)^{11}\text{C}$   
 $^{12}\text{C}(\text{d},\text{n})^{13}\text{N}$ ,  $^{16}\text{O}(\text{p},\alpha)^{13}\text{N}$



## Cyclotron

北大病院内の  
サイクロトロン

巨大な電磁石

水素または重水素  
原子核を加速して  
元素に衝突させ、

陽電子を出す  
RI を作っている。

# 被曝 Exposure をあらわす単位

**吸収線量**：1kgの物体が1Jの放射線エネルギーを吸収した被曝は、**1Gy(グレイ)**。

**線量等量**：人体が、体重1kgあたりに1Jのエネルギーを受ける被曝量は、**1Sv**。

**1Sv(シーベルト) = 吸収線量 × 線質係数**

**線質係数Q**：線質の違いによる人体へのエネルギー付与(電離を起こす程度)を表す指標。

**Q=1** : X線、 $\gamma$ 線、 $\beta$ 線,

**Q=10** : 陽子線、中性子線      **Q=20** 多重荷電粒子



陽電子放出核種の半減期(half-life)は短いので  
PET検査の被曝(exposure)は少ない。

被曝の単位はシーベルト(Sv) ( $mSv = 0.001 Sv$ )  
体重1kgに1Jのエネルギーを受ける被曝が1Sv。  
( $1 Sv = 1 J/kg$ ) 一般的に、100mSv以下は、無害。

18F-FDG (185MBq) 4 mSv (膀胱 20 心臓 10 胎児 3)

11C-Methionine (370MBq) 2 mSv (脾、肝 7)

15-O-CO<sub>2</sub> (3000MBq) 2 mSv (肺 11)

CT 7mSv ~ 10 ~

血管造影 7 mSv ~ 10 (1分で皮膚0.5)

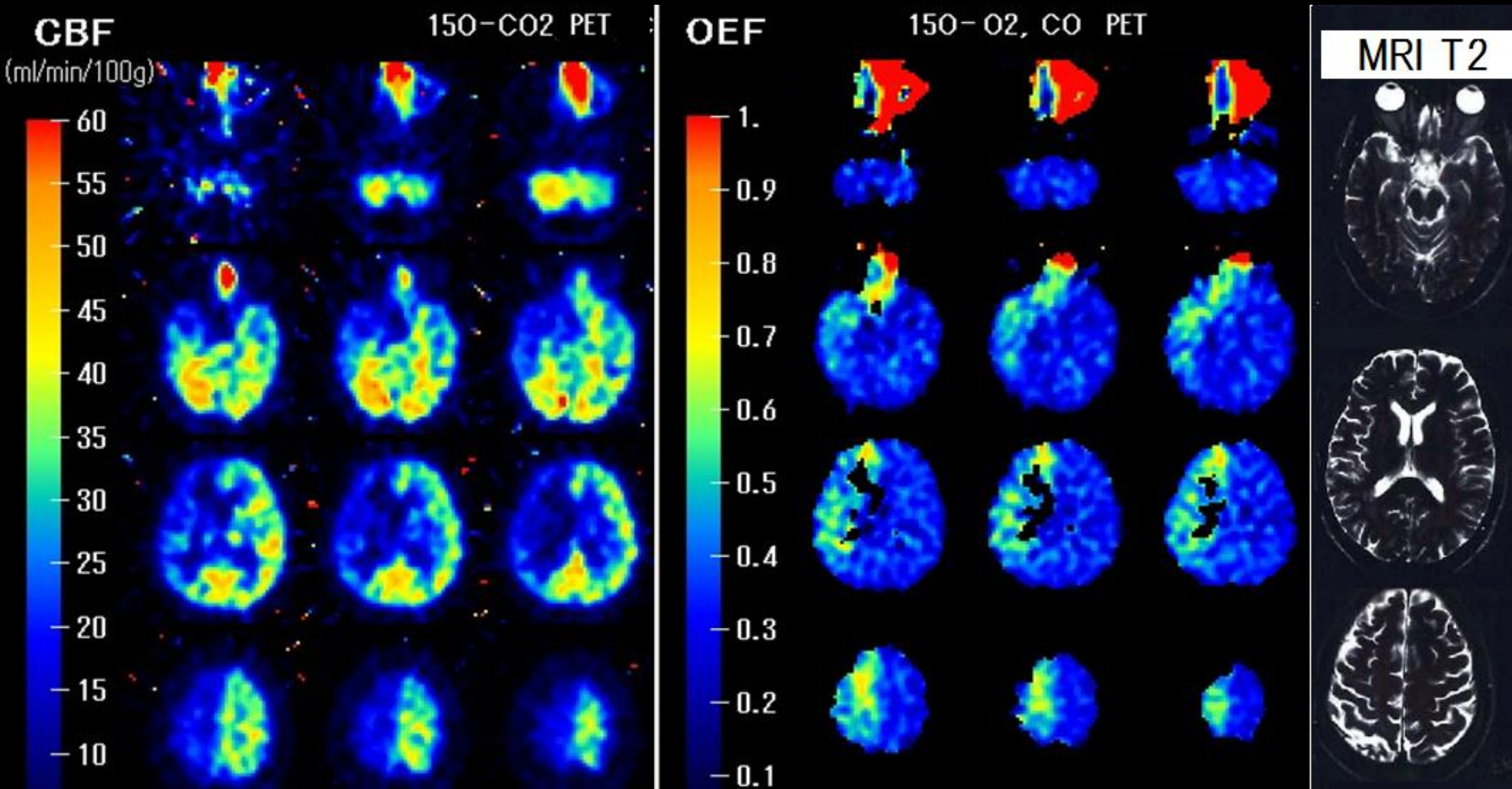
胃、消化管造影 3 mSv

単純X線撮影 0.1 mSv (胸部) 0.2 mSv (骨盤)

$^{15}\text{O}\text{-CO}_2$ 、 $\text{O}_2$  脳PET 脳血流量CBF、酸素摂取率OEFを定量。

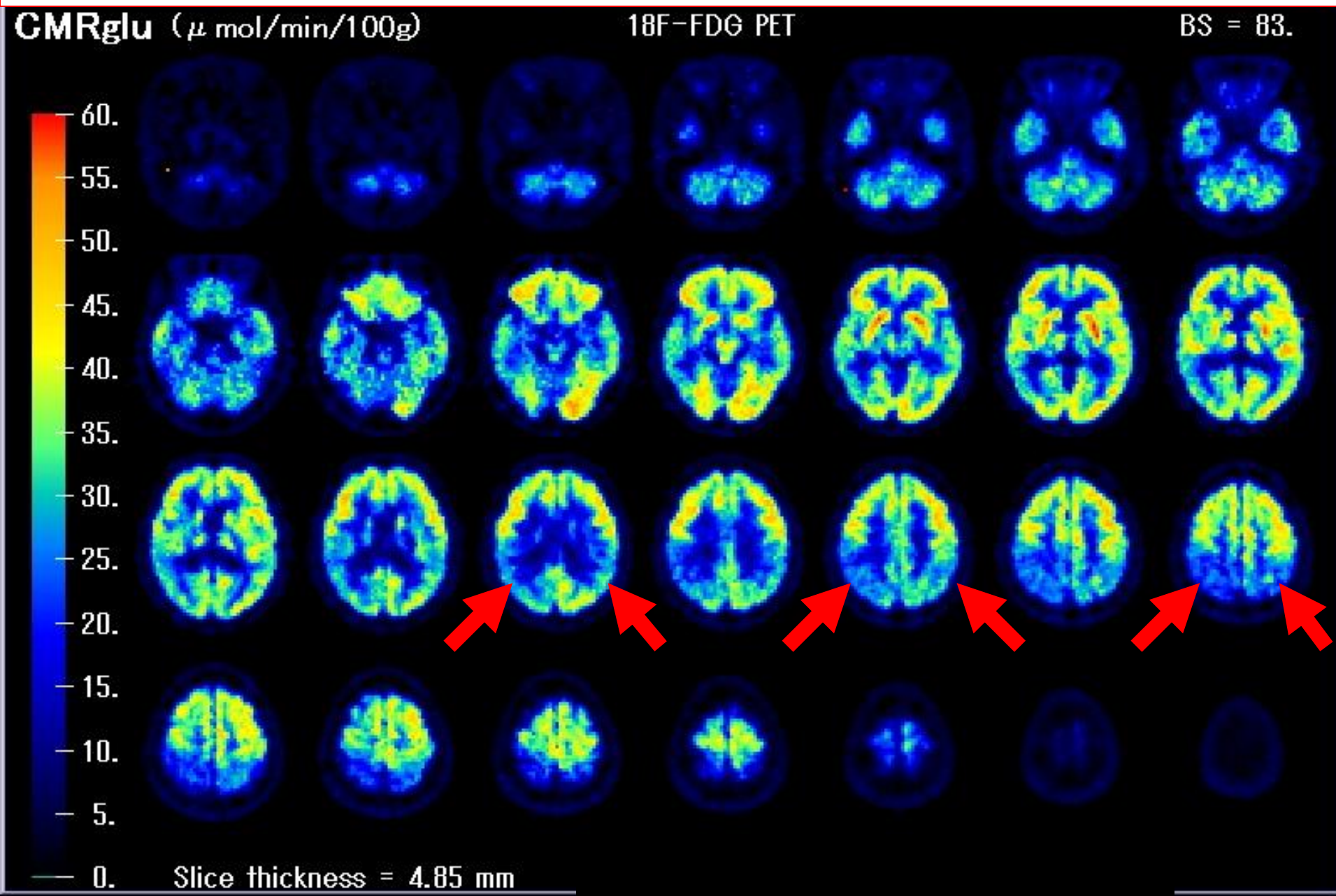
右内頸動脈高度狭窄症例。脳梗塞ではないが(MRI T2像は正常)、  
右ACA、MCA領域の 高度血流低下、酸素摂取率の亢進あり。

(貧困灌流 misery perfusion の状態)

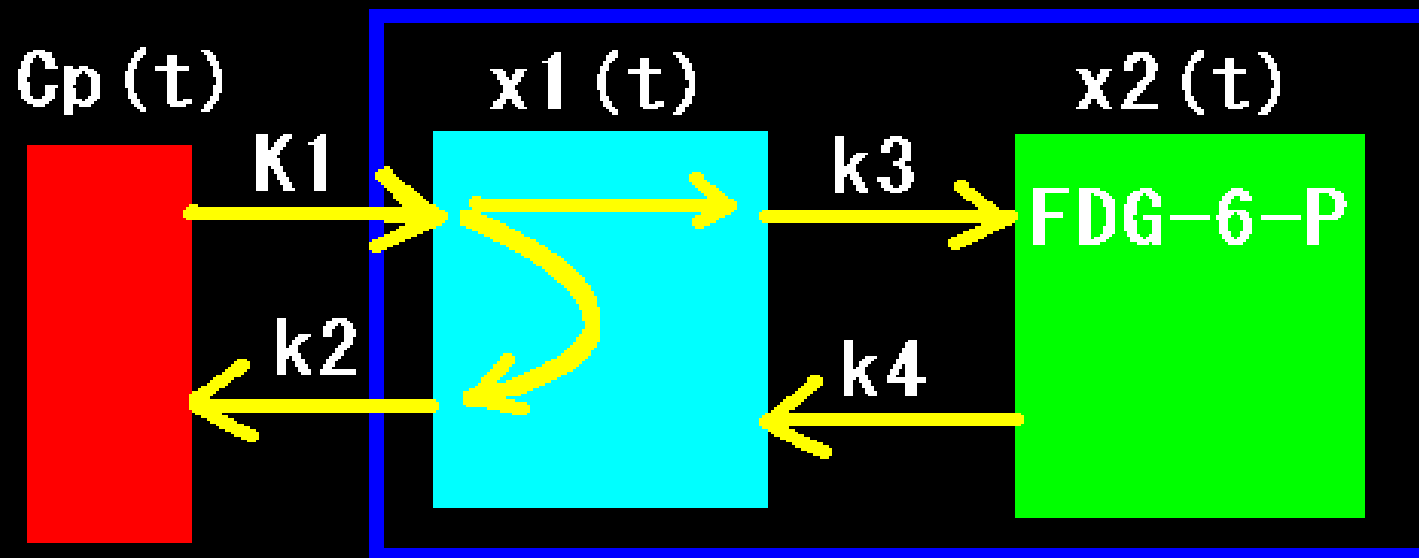


# $^{18}\text{F}$ -FDG 脳PET 脳のブドウ糖消費量を定量

若年性アルツハイマー病 左右頭頂葉の変性、糖代謝低下。



# FDG (フルオロデオキシグルコース) における 3コンパートメントモデル解析



$$dC_p/dt = k_2 x_1 - K_1 C_p$$

$$dx_1/dt = K_1 C_p + k_4 x_2 - (k_2 + k_3) x_1$$

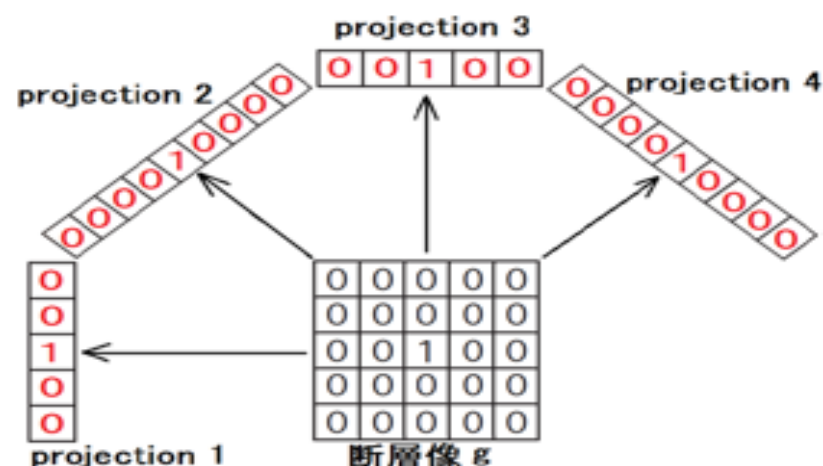
$$dx_2/dt = k_3 x_1 - k_4 x_2$$

ブドウ糖摂取量 =  $\frac{\text{血糖値} \times K_1 \times k_3 / (k_2 + k_3)}{0.42}$

# フィルタ重畳逆投影法 (FBP; Filtered Back Projection)

CTやSPECT、PETなどの人体断層画像を得るための基本的な計算法はフィルタ重畳逆投影法である。

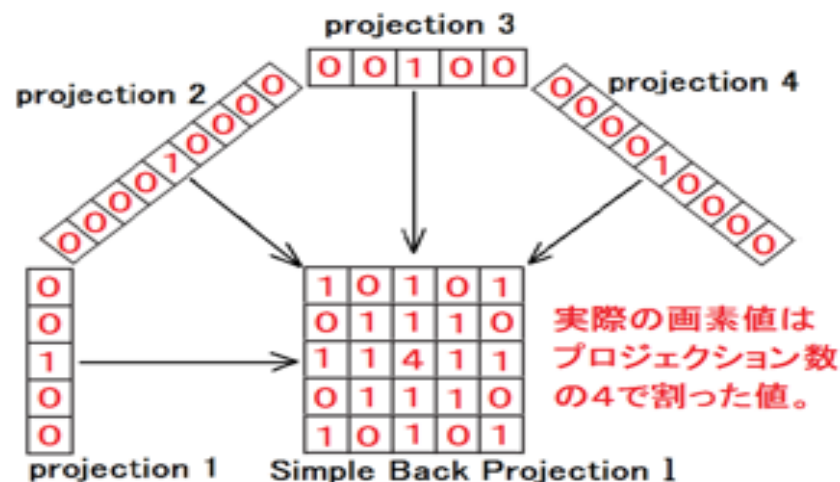
① 断層像  $g$  の 4方向からの  
投影データ (projection) を求める。



例として、5x5画素の断層像 $g$ を得るために45度おきに4方向から透視(投影)データを収集したとする。断層像 $g$ の正解は、中心に画素値1があるだけで周囲の画素値は全て0とする。

断層像 $g$ を4方向から投影して得るデータを求めると、左図①のようにプロジェクションデータ1から4が収集される。

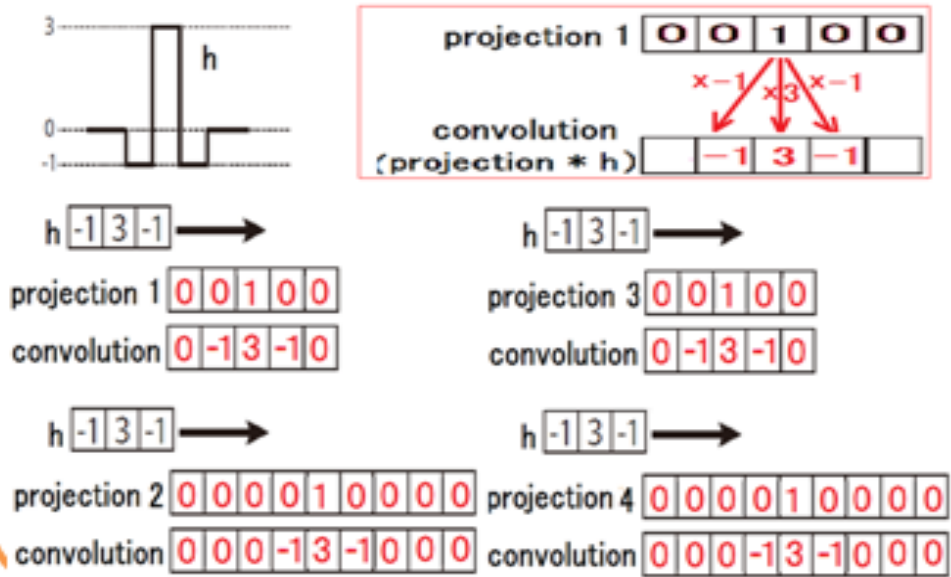
② 単純重ね合わせ Simple Back Projection



収集されたプロジェクションデータから断層像 $g$ を得るために、まず単純に4方向から得た投影データを左図②のように5x5画素の行列内に逆投影する。断層像は、中心に最大の画素値を得るが、その周囲にも0ではない画素値が分布する。

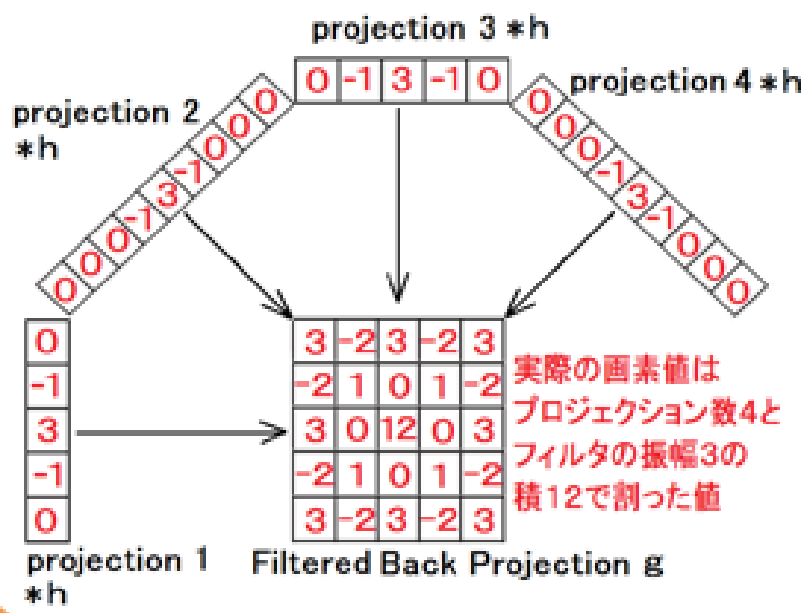
これが単純重ね合わせ (Simple Back Projection) で、本当は中心に画素値1があるだけなのに、周囲にも画素値が発生して点像がぼけている。

### ③ 実空間フィルタ畳込み処理 projection \* h



単純重ね合わせでは点が点像に戻らない。それを補正するため投影データにフィルタ $h$ をかける。ここでは簡単に要素数3個の行列 $(-1, 3, -1)$ を $h$ とする。投影データの値に行列 $h$ をかける。このようにスカラー値に行列を畳込むように掛ける演算を畳込み、重畳 (convolution) という。行列 $h$ を畳込まれた各プロジェクションを左図③に示す。これらを4方向から5x5画素の行列内に逆投影する。これをフィルタ重畳逆投影 (FBP; Filtered Back Projection) という。

### ④ フィルタ重畳重ね合わせ Filtered Back Projection



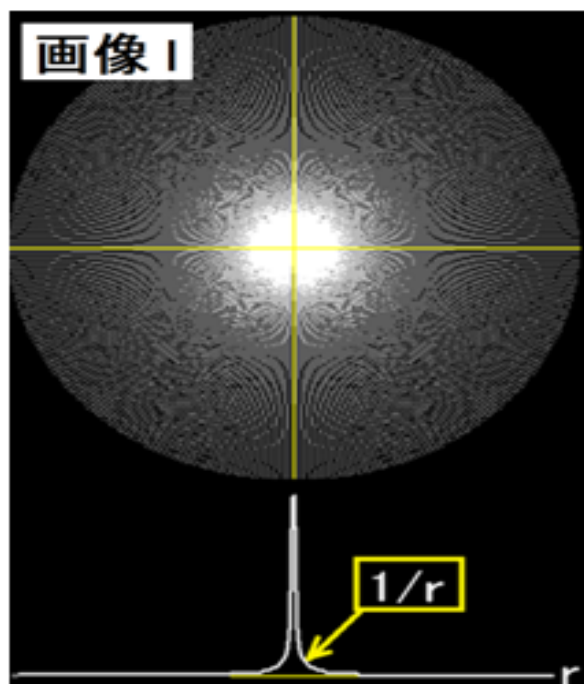
行列 $h$ を畳込まれた4方向の投影データ (演算記号 $*$ は畳込みを表す) を、左図④のように5x5画素の行列内に逆投影すると、単純重ね合わせよりも、最大値を示す中心画素の近傍の画素値が低く抑えられ明瞭な点像が得られ、本来の断層像 $g$ に近い画像になる。つまりフィルタ重畳逆投影法は、点像をぼかさずに点像に戻す事ができるので、横方向からの投影データから正しい断層画像を算出できる。

画像  $g$



画像中心の1画素だけ値が1で、他は全て0の256x256画素の画像を作成し、これを画像  $g$  とする。その像を1度毎に180度方向から投影した投影像  $P_{\theta}$  を作成する。左図では5度毎の  $P_{\theta}$  を表示。

画像  $l$



180枚の投影像  $P_{\theta}$  から単純重ね合わせ像を作ると、画像中心の1画素が最大値を示し、その近傍に中心からの距離  $r$  に反比例する値が示される。つまり1点の画素値が  $1/r$  の関数に広がっている。この単純重ね合わせ像を画像  $l$  とする。

$1/r$  とは、1点の画素を、画素からの距離  $r$  に反比例した値の分布に変換する関数と解釈すると、画像  $g$  に関数  $1/r$  を畳込んだ像が  $l$  である。

式で表現すると  $l = g * (1/r)$  となる。

$L$ 、 $g$ 、 $1/r$  のフーリエ変換を  $L$ 、 $G$ 、 $F(1/r)$  と表現すると、畳み込みの定理より  $L = G \cdot F(1/r)$  となる。

ここで  $1/r$  のフーリエ変換を計算すると、 $F(1/r) = 1/fr$  となる。  
( $fr$  はフーリエ空間での周波数を表す。)

したがって、 $L = G/fr$ 、 $G = L \cdot fr$

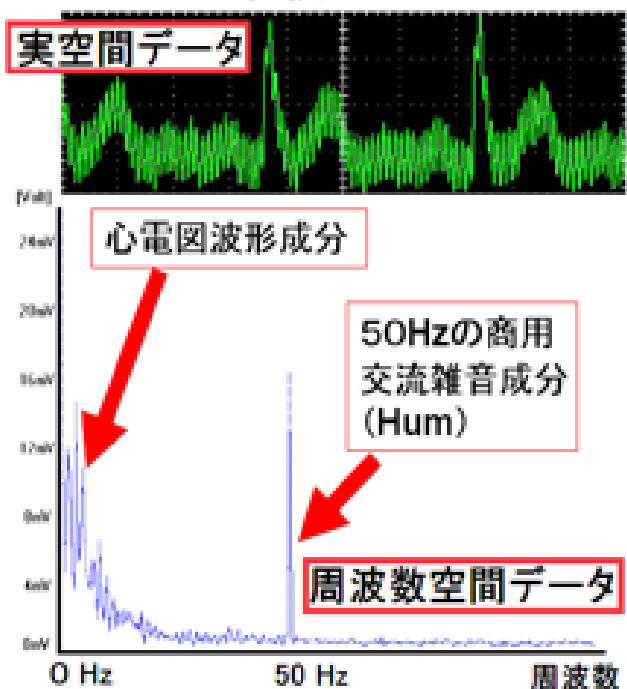
フーリエ空間 (周波数空間) で、画像  $l$  のフーリエ変換像  $L$  にフィルタ  $fr$  をかけると、画像  $g$  のフーリエ変換  $G$  が得られる。

この周波数空間での計算は、以下の式を用いて実空間で済ませられる。

!  $g = l * h$  (\* は畳込み演算) (h は  $fr$  の逆フーリエ変換)

# フーリエ変換

商用交流雑音を伴う心電図の  
1次元フーリエ変換



フーリエ変換 Fourier transform

実空間の曲線や画像データなどを周波数空間のデータに変換する演算。実空間データに含まれる  $\cos$  成分と  $\sin$  成分を各周波数ごとに算出する。オイラーの公式  $\exp(j\theta) = \cos\theta + j\sin\theta$  を用いて、以下の式で示される。

曲線  $g(t)$  の周波数分布を  $G(f)$  とすると、

$$G(f) = \int g(t) \exp(-j \cdot 2\pi f t) dt \quad (j \text{ は虚数単位})$$

逆フーリエ変換も類似した式で表される。

$$g(t) = \int G(f) \exp(j \cdot 2\pi f t) df$$

高速フーリエ変換 FFT Fast Fourier Transform

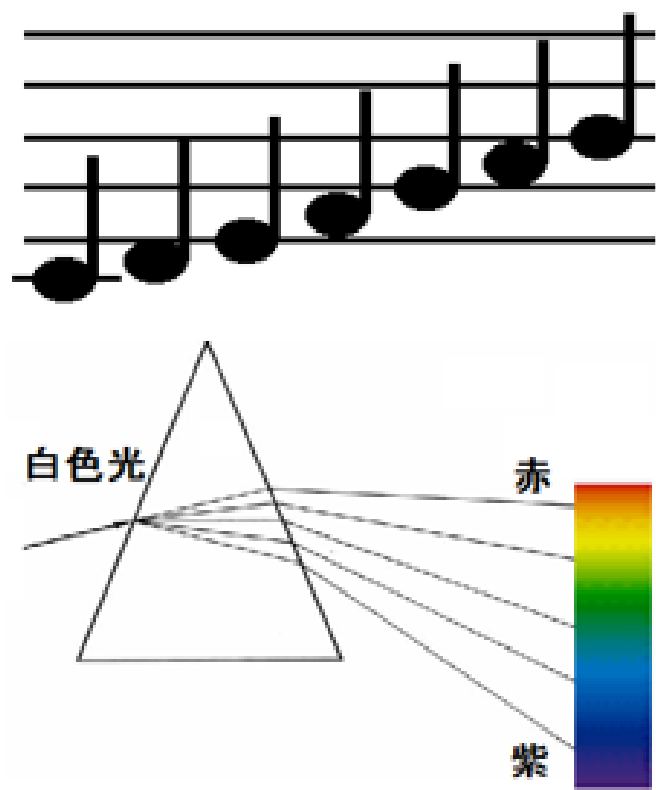
フーリエ変換、逆フーリエを行う際に使用されるアルゴリズム、プログラム。フーリエ変換の公式は、波形データが連続曲線と想定して  $\exp(-j \cdot 2\pi f t)$  という三角関数のオイラー式表記をしているが、実際に扱う数値はデジタルデータであり離散的なので、 $\exp(-j \cdot 2\pi f t)$  の項を  $w^{nk}$  のように変形して高速に計算できる巧みなアルゴリズムである。



## $1/r$ のフーリエ変換が $1/fr$ になる理由

2次元フーリエ変換の公式の極座標表現を用いると

( $r$ と $\theta$ は実空間の原点からの距離と偏角、 $fr$ は周波数空間の原点からの距離)  
関数  $g(r)$  のフーリエ変換は  $\int \int g(r) \exp(-j \cdot 2\pi r fr) r dr d\theta$  (ヤコビアンに注意)  
 $g(r) = 1/r$  とすると  $\int \int (1/r) \exp(-j \cdot 2\pi r fr) r dr d\theta = \int \int \exp(-j \cdot 2\pi r fr) dr d\theta = 1/fr$



周波数空間を理解することは難しい印象を持つが、周波数空間や周波数分布を表現しているものは一般にも結構ある。

たとえば楽譜は、音楽の周波数分布、曲のフーリエ変換とも解釈できる。五線譜の下側の音符は低音、低周波数成分を表し、上側の音符は高音、高周波成分を示している。

虹は白色光に含まれる色の周波数分布を示している。雨粒中で屈折しやすい高周波の紫色成分から、屈折しにくい低周波の赤色成分まで、周波数の順序で色が並んでいる。

## 畳込みの定理

## 畳込みの定理

実空間での畳込み演算は、周波数空間では掛け算になる、という定理である。

$l(x)$  に  $h(x)$  を畳込んで  $g(x)$  を算出する式は、

$g(x) = \int l(n) h(x-n) dn$  これを  $g = l * h$  と表し、畳込み (convolution) という。

$h(x-n)$  のフーリエ変換を  $H(f)$  とすると、

$h(x-n) = \int H(f) \exp(j \cdot 2\pi f(x-n)) df$  (逆フーリエ変換の公式を利用)

これを、畳込みの式  $g(x) = \int l(n) h(x-n) dn$  に代入し (つまり  $g = l * h$  である)

$L(f) = \int l(n) \exp(-j \cdot 2\pi fn) dn$  (フーリエ変換の公式)

$g(x) = \int G(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) df$  (逆フーリエ変換の公式) を利用すると、

$$g(x) = \int l(n) \int H(f) \exp(j \cdot 2\pi f(x-n)) df dn$$

$$= \int l(n) \int H(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) \exp(-j \cdot 2\pi fn) df dn$$

$$= \int \{ \int l(n) \exp(-j \cdot 2\pi fn) dn \} H(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) df$$

$$= \int L(f) H(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) df$$

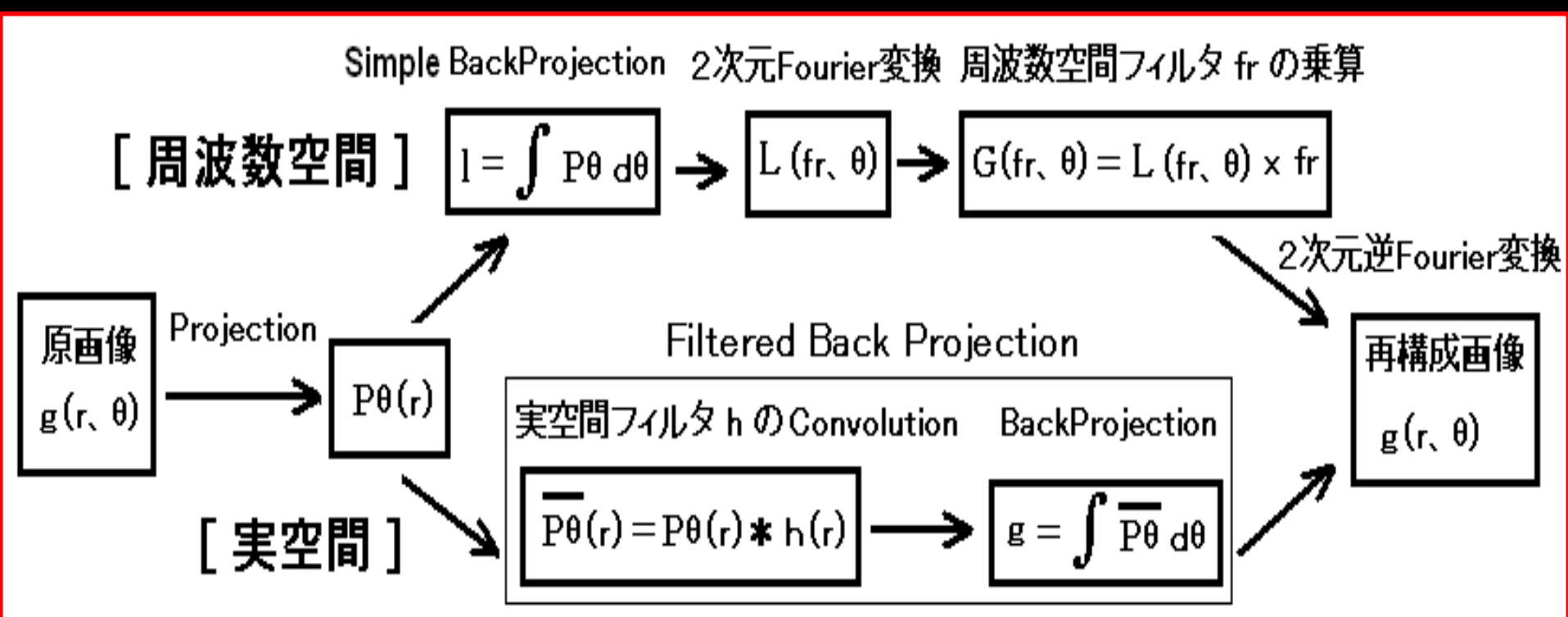
$$= \int G(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) df \quad \text{これより } G(f) = L(f) H(f) \text{ である。}$$

したがって  $g = l * h$  であれば、 $G(f) = L(f) H(f)$  である。

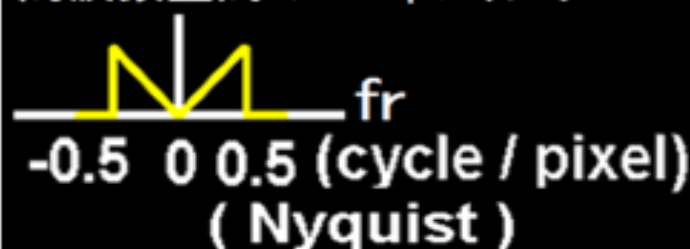
投影像  $P_\theta$  を単純重ね合わせした画像  $l$  を2次元フーリエ変換し、周波数空間でフィルタ  $fr$  を乗算したデータを2次元逆フーリエ変換すると、正確な断層画像  $g$  が得られる。

畳込みの定理を使うと、これらの周波数空間での処理が実空間で簡略化される。

投影像  $P_\theta$  にフィルタ  $h$  ( $fr$  の1次元逆フーリエ変換) を畳込み、それを重ね合わせると正確な断層画像  $g$  が得られる。



## Rampフィルタ

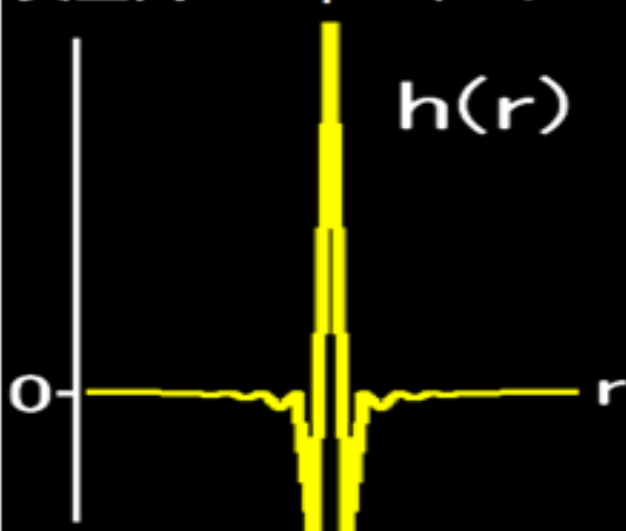
周波数空間のRampフィルタ  $H$ 

周波数空間でのフィルタ  $fr$ とは、どのような形をしているのか。1次元周波数空間の縦軸の周波数成分が  $fr$  の値を持つフィルタであるが、横軸が周波数軸すなわち  $fr$  である。つまり周波数空間で、正比例のような形状になる。

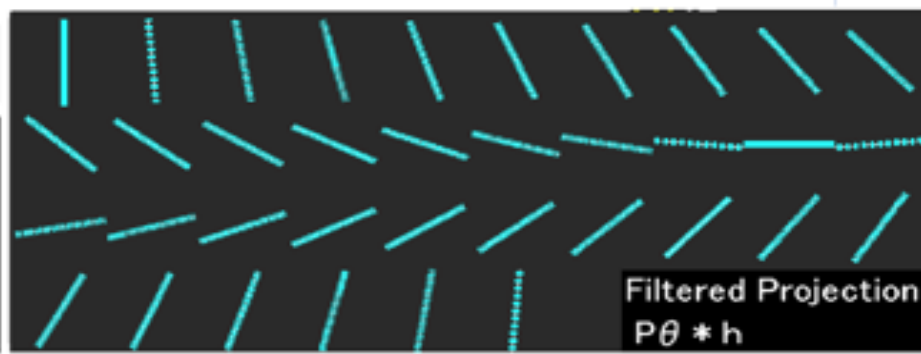
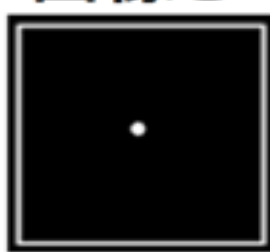
周波数にはマイナスの値は無いが、高速フーリエ変換 (FFT) のアルゴリズムの都合で見かけ上、マイナスの周波数データが存在する。縦軸の周波数成分にはマイナスは無いので、周波数がマイナス側の成分は絶対値となり、原点を中心に左右対称な絶対値  $|fr|$  の関数として表現される。

さらにサンプリング定理によって、ナイキスト周波数 (0.5 cycle / pixel) 以上の高周波成分はノイズなので除去する。

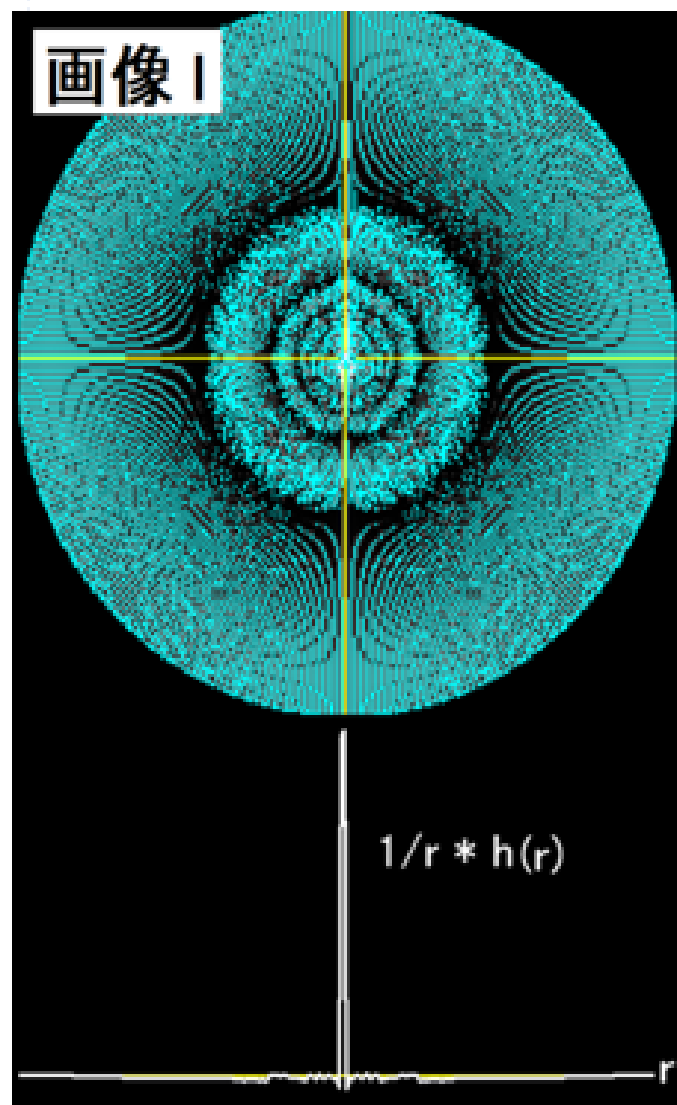
よって、このフィルタは上図のようになり、これをRampフィルタという。

実空間 Ramp フィルタ  $h$ 

周波数空間の Ramp フィルタを  $H$  と表現する。 $H$  を1次元逆フーリエ変換すると、実空間での Ramp フィルタ  $h$  が左図のように算出される。

画像  $g$ 

## 画像 I

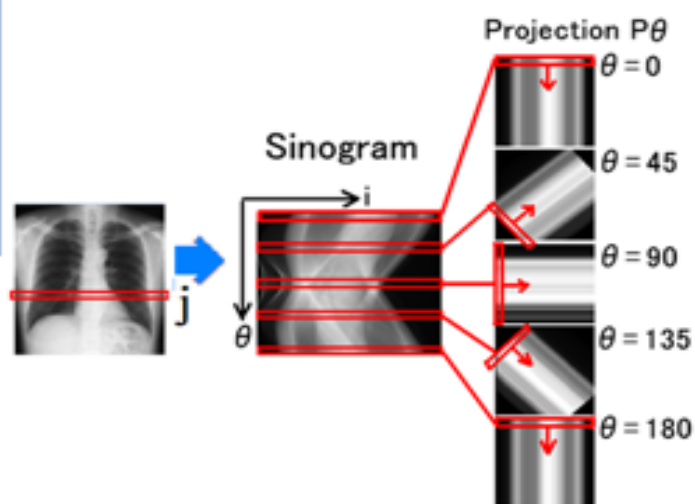


画像中心の1画素だけ値が1で、他は全て0の256x256画素の画像  $g$  を1度毎に180度方向から透過投影した投影像  $P\theta$  を作成する。次に全ての  $P\theta$  に Ramp フィルタ  $h$  を畳込む (式で表すと  $P\theta * h$ ) (上図で青色の部位はマイナスの画素値) (全ての  $P\theta * h$  の断面が  $h$  と同じ形状をしている)。さらに、全ての  $P\theta * h$  を重ね合わせて画像 I を算出する。式で表すと  $I = \int (P\theta * h) d\theta$

画像 I は中心の1画素だけ値が1で、周囲は殆ど0に近い値を示し、ほぼ画像  $g$  に戻っている。

$P\theta$  の単純重ね合わせ像では、画像中心の1画素が最大値を示し、その近傍に中心からの距離  $r$  に反比例する  $1/r$  の関数に画素値が広がっていたが、Ramp フィルタ  $h$  を畳込むと、その広がりが補正されて元の画像が再現される。このRamp フィルタ  $h$  の機能によって断層画像を算出することができる。

## 画像再構成フィルタ



CT装置が収集した各々の角度における投影画像 ( $P_\theta$ ) から断層画像を再構成する方法を考える。

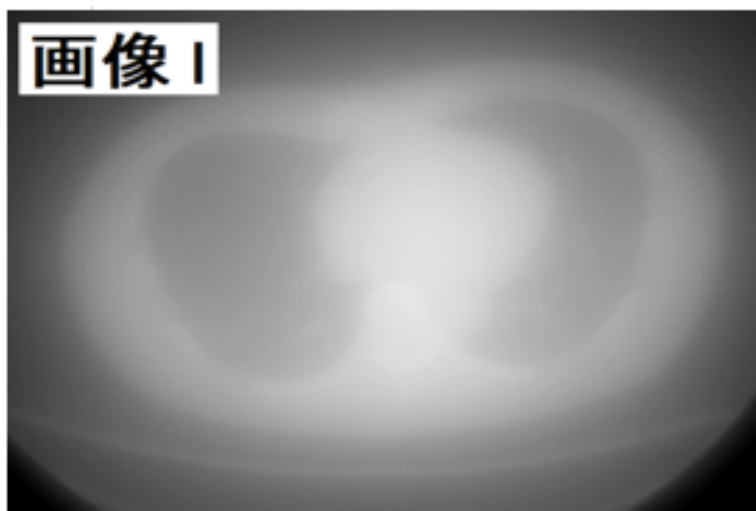
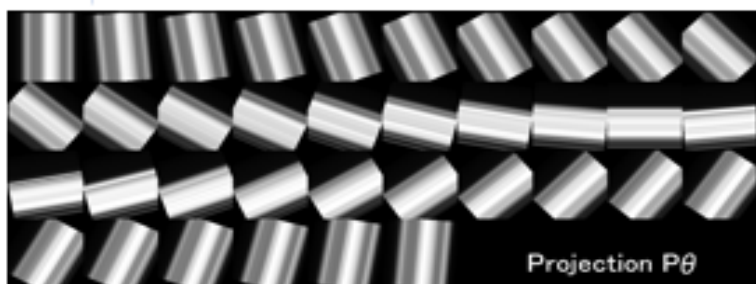
スライス  $j$  でのサイノグラムが求められたとする。サイノグラムの各スライスの1次元配列は、各々の角度から収集された投影データである。

サイノグラムの各スライスの1次元配列から、各々の角度に傾いた2次元投影画像  $P_\theta$  を作成する。2次元投影画像  $P_\theta$  は、サイノグラムの各  $\theta$  の1次元データを2次元に引き伸ばした像である。

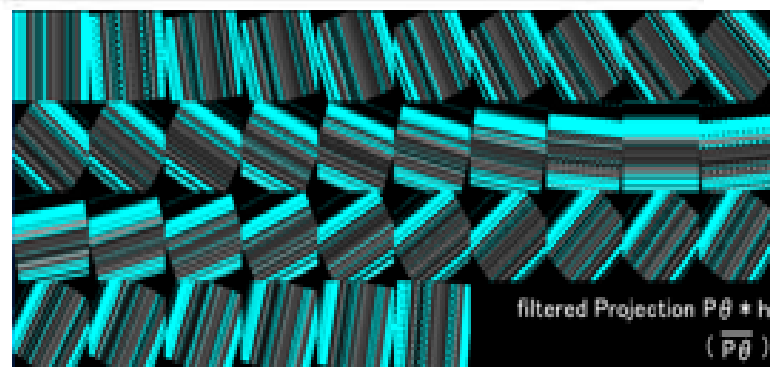
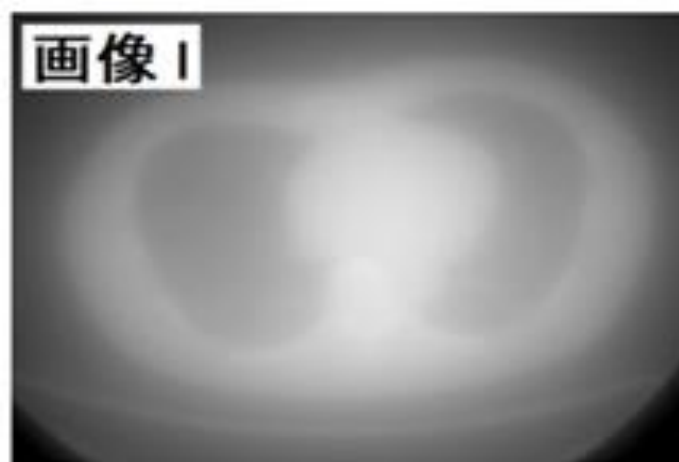
$P_\theta$  を単純に重ね合わせた画像を  $I$  とすると

$$I = \int P_\theta d\theta \quad (\text{Simple back projection})$$

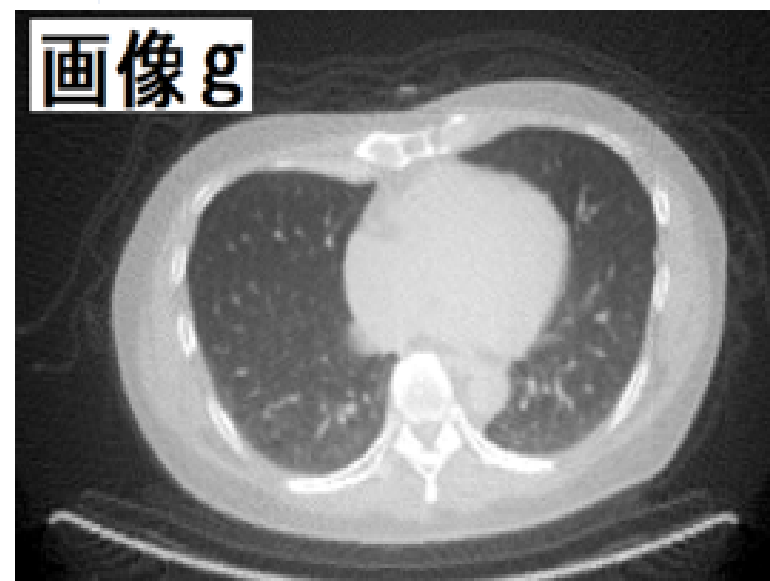
画像  $I$  は、回転中心部ほど重ね合せ回数が多くなり、中心から距離が遠いほど値の低い像になる。



画像 l



画像 g



## フィルタ重畳逆投影法 (FBP)

回転中心からの距離  $r$  に反比例した濃度に補正するフィルタ  $1/r$  を正確な断層像  $g$  に畳み込んだ像  $l$  である。式で表現すると  $l = g * (1/r)$  となる。

$l$ 、 $g$ 、 $1/r$  のフーリエ変換を  $L$ 、 $G$ 、 $F(1/r)$  と表現すると、畳み込みの定理より  $L = G \cdot F(1/r)$  となる。ここで  $F(1/r) = 1/fr$  なので  $L = G/fr$   
 $G = L \cdot fr$  この式を逆フーリエ変換して  $g = l * h$

この式に、 $l = \int P\theta d\theta$  を代入すると、  
 $g = \int P\theta d\theta * h$ 、 $g = \int (P\theta * h) d\theta$   
( $h$  は  $\theta$  と独立した関数なので交換可)

$$g = \int \overline{P\theta} d\theta \quad ( \overline{P\theta} = P\theta * h ) \quad \text{FBPの式}$$

$P\theta$  に実空間フィルタ  $h (= fr$  の逆フーリエ変換) を畳み込めば、重ね合せると正確な断層像  $g$  になる  
2次元投影画像  $\overline{P\theta}$  を算出できる。  
これを Filtered Back Projection (FBP) という。

## 問題1

$^{18}\text{F}$ -FDG PET の SUV 値で正しいのはどれか。

1. 血糖値が高いと腫瘍で高くなる。
2. 運動後に検査をすると筋肉で低くなる。
3. 皮下への注射漏れがあると脳で高くなる。
4. 投与から1時間経過すると腫瘍で一定となる。
5.  $^{18}\text{F}$ -FDG が体内に均等に分布すると1になる。

## 問題2

$^{18}\text{F}$ -FDG の集積性が低いのはどれか。

1. 大腸癌
2. 悪性黒色腫
3. 悪性リンパ腫
4. 頭頸部扁平上皮癌
5. 高分化型肝細胞癌