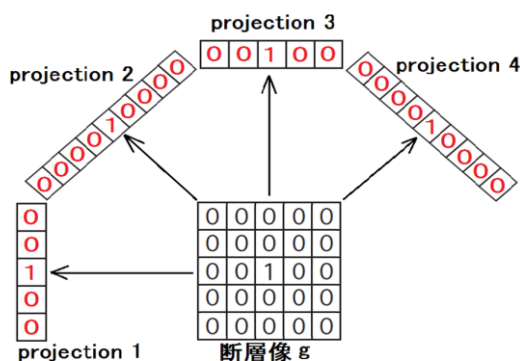


フィルタ重畳逆投影法

フィルタ重畳逆投影法 (FBP; Filtered Back Projection)

CTやSPECT、PETなどの人体断層画像を得るための基本的な計算法はフィルタ重畳逆投影法である。

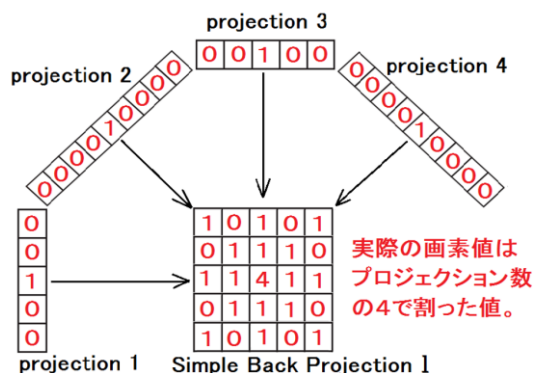
- ① 断層像 g の 4 方向からの
投影データ (projection) を求める。



例として、5x5画素の断層像 g を得るために45度おきに4方向から透視（投影）データを収集したとする。断層像 g の正解は、中心に画素値1があるだけで周囲の画素値は全て0とする。

断層像 g を4方向から投影して得るデータを求めると、左図①のようにプロジェクションデータ1から4が収集される。

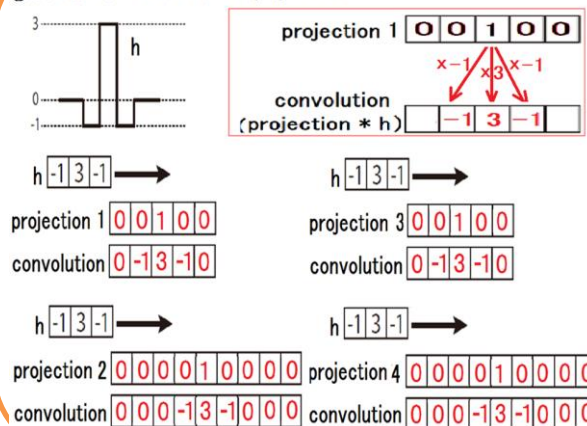
- ② 単純重ね合わせ Simple Back Projection



収集されたプロジェクションデータから断層像 g を得るために、まず単純に4方向から得た投影データを左図②のように5x5画素の行列内に逆投影する。断層像は、中心に最大の画素値を得るが、その周囲にも0ではない画素値が分布する。

これが単純重ね合わせ (Simple Back Projection) で、本当は中心に画素値1があるだけなのに、周囲にも画素値が発生して点像がぼけている。

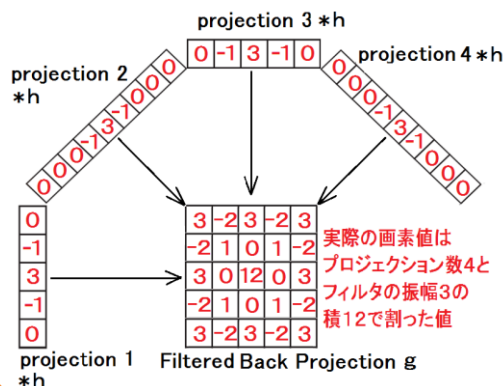
- ③ 実空間フィルタ畳込み処理 projection * h



単純重ね合わせでは点が点像に戻らない。それを補正するため投影データにフィルタ h をかける。ここでは簡単に要素数3個の行列 $h = [-1, 3, -1]$ を h とする。投影データの値に行列 h をかける。このようにスカラー値に行列を畳込むように掛ける演算を畳込み、重畳 (convolution) という。行列 h を畳込まれた各プロジェクションを左図③に示す。これらを4方向から5x5画素の行列内に逆投影する。これをフィルタ重畳逆投影 (FBP; Filtered Back Projection) という。

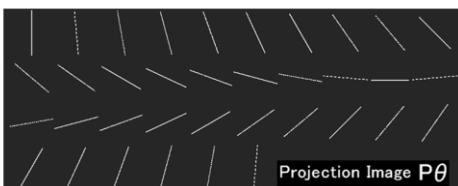
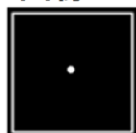
フィルタ重畳逆投影法 2

④ フィルタ重畳重ね合わせ Filtered Back Projection



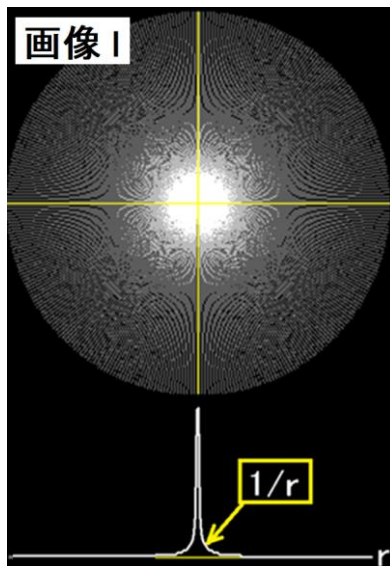
行列 h を畳まれた4方向の投影データ（演算記号 $*$ は畳込みを表す）を、左図④のように5x5画素の行列内に逆投影すると、単純重ね合わせよりも、最大値を示す中心画素の近傍の画素値が低く抑えられ明瞭な点像が得られ、本来の断層像 g に近い画像になる。つまりフィルタ重畳逆投影法は、点像をぼかさずに点像に戻す事ができるので、横方向からの投影データから正しい断層画像を算出できる。

画像 g



画像中心の1画素だけ値が1で、他は全て0の256x256画素の画像を作成し、これを画像 g とする。その像を1度毎に180度方向から投影した投影像 $P\theta$ を作成する。左図では5度毎の $P\theta$ を表示。

画像 I



180枚の投影像 $P\theta$ から単純重ね合わせ像を作ると、画像中心の1画素が最大値を示し、その近傍に中心からの距離 r に反比例する値が示される。つまり1点の画素値が $1/r$ の関数に広がっている。この単純重ね合わせ像を画像 I とする。

$1/r$ とは、1点の画素を、画素からの距離 r に反比例した値の分布に変換する関数と解釈すると、画像 g に関数 $1/r$ を畳込んだ像が I である。

式で表現すると $I = g * (1/r)$ となる。

I 、 g 、 $1/r$ のフーリエ変換を L 、 G 、 $F(1/r)$ と表現すると、畳み込みの定理より $L = G \cdot F(1/r)$ となる。

ここで $1/r$ のフーリエ変換を計算すると、 $F(1/r) = 1/fr$ となる。
（ fr はフーリエ空間での周波数を表す。）

したがって、 $L = G / fr$ 、 $G = L \cdot fr$

フーリエ空間（周波数空間）で、画像 I のフーリエ変換像 L にフィルタ fr をかけると、画像 g のフーリエ変換 G が得られる。
この周波数空間での計算は、以下の式を用いて実空間で済ませられる。

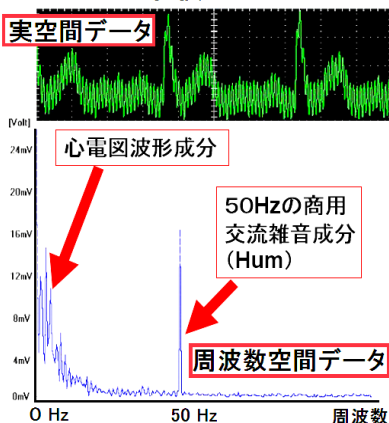
! $g = I * h$ （ $*$ は畳込み演算）（ h は fr の逆フーリエ変換）

フーリエ変換

商用交流雑音を伴う心電図の
1次元フーリエ変換

フーリエ変換 Fourier transform

実空間データ



実空間の曲線や画像データなどを周波数空間のデータに変換する演算。実空間データに含まれる $\cos$ 成分と $\sin$ 成分を各周波数ごとに算出する。オイラーの公式 $\exp(j\theta) = \cos\theta + j\sin\theta$ を用いて、以下の式で示される。

曲線 $g(t)$ の周波数分布を $G(f)$ とすると、

$$G(f) = \int g(t) \exp(-j \cdot 2\pi ft) dt \quad (j \text{ は虚数単位})$$

逆フーリエ変換も類似した式で表される。

$$g(t) = \int G(f) \exp(j \cdot 2\pi ft) df$$

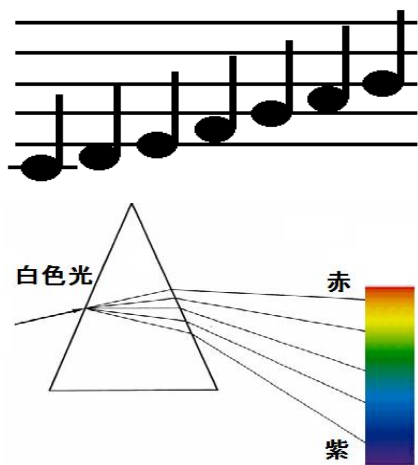
高速フーリエ変換 FFT Fast Fourier Transform

フーリエ変換、逆フーリエを行う際に使用されるアルゴリズム、プログラム。フーリエ変換の公式は、波形データが連続曲線と想定して $\exp(-j \cdot 2\pi ft)$ という三角関数のオイラー式表記をしているが、実際に扱う数値はデジタルデータであり離散的なので、 $\exp(-j \cdot 2\pi ft)$ の項を w^{nk} のように変形して高速に計算できる巧みなアルゴリズムである。

1/r のフーリエ変換が 1/fr になる理由

2次元フーリエ変換の公式の極座標表現を用いると

(r と θ は実空間の原点からの距離と偏角、 fr は周波数空間の原点からの距離)
 関数 $g(r)$ のフーリエ変換は $\iint g(r) \exp(-j \cdot 2\pi r fr) r dr d\theta$ (ヤコビアンに注意)
 $g(r) = 1/r$ とすると $\iint (1/r) \exp(-j \cdot 2\pi r fr) r dr d\theta = \iint \exp(-j \cdot 2\pi r fr) dr d\theta = 1/fr$



周波数空間を理解することは難しい印象を持つが、周波数空間や周波数分布を表現しているものは一般にも結構ある。

たとえば楽譜は、音楽の周波数分布、曲のフーリエ変換とも解釈できる。五線譜の下側の音符は低音、低周波数成分を表し、上側の音符は高音、高周波成分を示している。

虹は白色光に含まれる色の周波数分布を示している。雨粒中で屈折しやすい高周波の紫色成分から、屈折しにくい低周波の赤色成分まで、周波数の順序で色が並んでいる。

畳込みの定理

畳込みの定理

実空間での畳込み演算は、周波数空間では掛け算になる、という定理である。

$l(x)$ に $h(x)$ を畳込んで $g(x)$ を算出する式は、

$g(x) = \int l(n) h(x-n) dn$ これを $g = l * h$ と表し、畳込み (convolution) という。

$h(x-n)$ のフーリエ変換を $H(f)$ とすると、

$h(x-n) = \int H(f) \exp(j \cdot 2\pi f(x-n)) df$ (逆フーリエ変換の公式を利用)

これを、畳込みの式 $g(x) = \int l(n) h(x-n) dn$ に代入し (つまり $g = l * h$ である)

$L(f) = \int l(n) \exp(-j \cdot 2\pi fn) dn$ (フーリエ変換の公式)

$g(x) = \int G(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) df$ (逆フーリエ変換の公式) を利用すると、

$$g(x) = \int l(n) \int H(f) \exp(j \cdot 2\pi f(x-n)) df dn$$

$$= \int l(n) \int H(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) \exp(-j \cdot 2\pi fn) df dn$$

$$= \int \{ \int l(n) \exp(-j \cdot 2\pi fn) dn \} H(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) df$$

$$= \int L(f) H(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) df$$

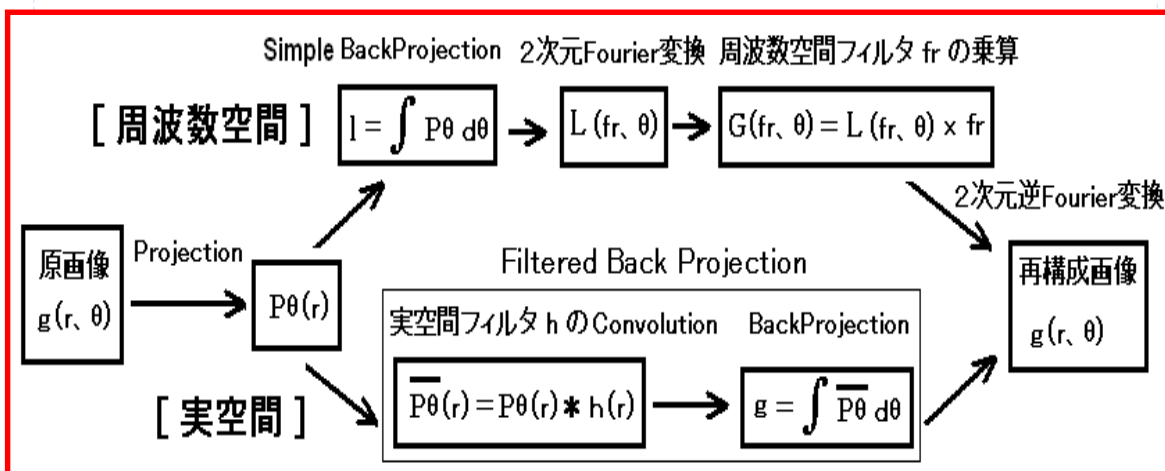
$$= \int G(f) \exp(j \cdot 2\pi fx) df \quad \text{これより } G(f) = L(f) H(f) \text{ である。}$$

したがって $g = l * h$ であれば、 $G(f) = L(f) H(f)$ である。

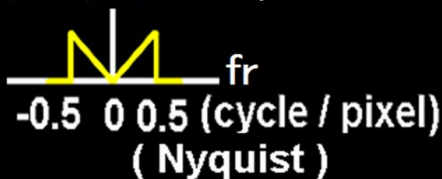
投影像 $P\theta$ を単純重ね合わせした画像 l を2次元フーリエ変換し、周波数空間でフィルタ fr を乗算したデータを2次元逆フーリエ変換すると、正確な断層画像 g が得られる。

畳込みの定理を使うと、これらの周波数空間での処理が実空間で簡略化される。

投影像 $P\theta$ にフィルタ h (fr の1次元逆フーリエ変換) を畳込み、それを重ね合わせると正確な断層画像 g が得られる。



Rampフィルタ

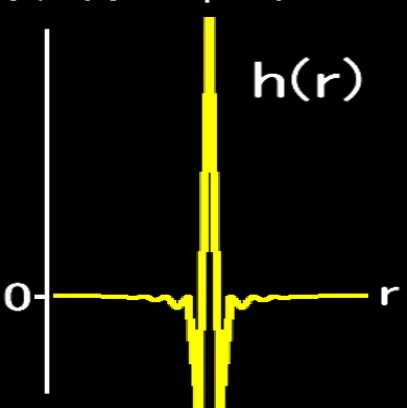
周波数空間のRampフィルタ H 

周波数空間でのフィルタ fr とは、どのような形をしているのか。1次元周波数空間の縦軸の周波数成分が fr の値を持つフィルタであるが、横軸が周波数軸すなわち fr である。つまり周波数空間で、正比例のような形状になる。

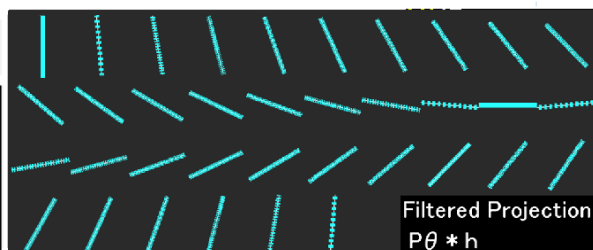
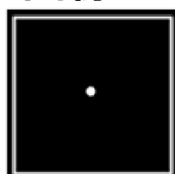
周波数にはマイナスの値は無いが、高速フーリエ変換（FFT）のアルゴリズムの都合で見かけ上、マイナスの周波数データが存在する。縦軸の周波数成分にはマイナスは無いので、周波数がマイナス側の成分は絶対値となり、原点を中心に左右対称な絶対値 $|fr|$ の関数として表現される。

さらにサンプリング定理によって、ナイキスト周波数（0.5 cycle / pixel）以上の高周波成分はノイズなので除去する。

よって、このフィルタは上図のようになり、これをRampフィルタという。

実空間 Ramp フィルタ h 

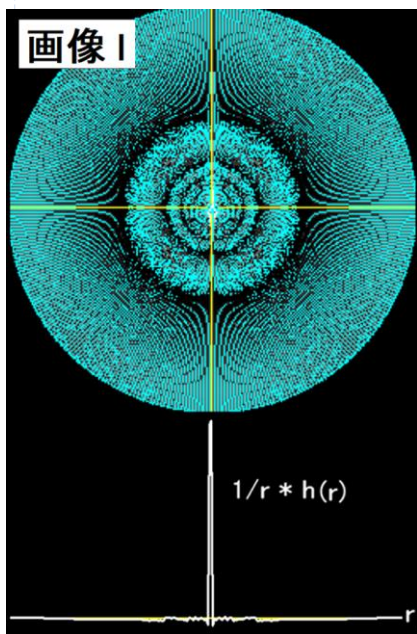
周波数空間の Ramp フィルタを H と表現する。 H を 1 次元逆フーリエ変換すると、実空間での Ramp フィルタ h が左図のように算出される。

画像 g 

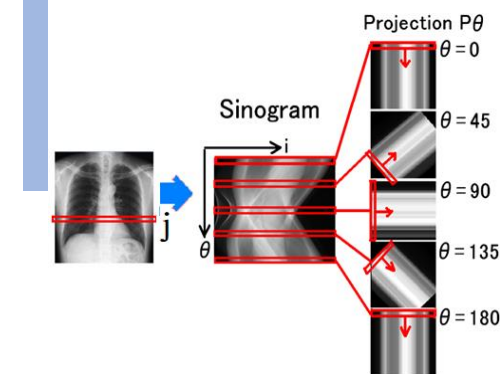
画像中心の 1 画素だけ値が 1 で、他は全て 0 の 256x256画素の画像 g を1度毎に180度方向から透過投影した投影像 $P\theta$ を作成する。次に全ての $P\theta$ に Ramp フィルタ h を畳込む（式で表すと $P\theta * h$ ）（上図で青色の部位はマイナスの画素値）（全ての $P\theta * h$ の断面が h と同じ形状をしている）。さらに、全ての $P\theta * h$ を重ね合わせて画像 I を算出する。式で表すと $I = \int (P\theta * h) d\theta$

画像 I は中心の 1 画素だけ値が 1 で、周囲は殆ど 0 に近い値を示し、ほぼ画像 g に戻っている。

$P\theta$ の単純重ね合わせ像では、画像中心の 1 画素が最大値を示し、その近傍に中心からの距離 r に反比例する $1/r$ の関数に画素値が広がっていたが、Ramp フィルタ h を畳込むと、その広がりが補正されて元の画像が再現される。このRampフィルタ h の機能によって断層画像を算出することができる。



画像再構成フィルタ



CT装置が収集した各々の角度における投影画像 (P_θ) から断層画像を再構成する方法を考える。

スライス j でのサイノグラムが求められたとする。サイノグラムの各スライスの 1 次元配列は、各々の角度から収集された投影データである。

サイノグラムの各スライスの 1 次元配列から、各々の角度に傾いた 2 次元投影画像 P_θ を作成する。2 次元投影画像 P_θ は、サイノグラムの各 θ の 1 次元データを 2 次元に引き伸ばした像である。

P_θ を単純に重ね合わせた画像を I とすると

$$I = \int P_\theta d\theta \quad (\text{Simple back projection})$$

画像 I は、回転中心部ほど重ね合せ回数が多くなり、中心から距離が遠いほど値の低い像になる。

フィルタ重畳逆投影法 (FBP)

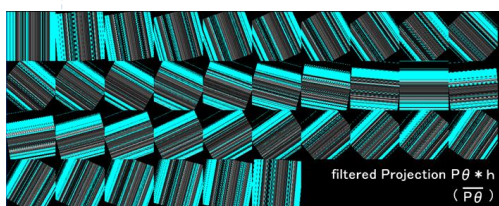
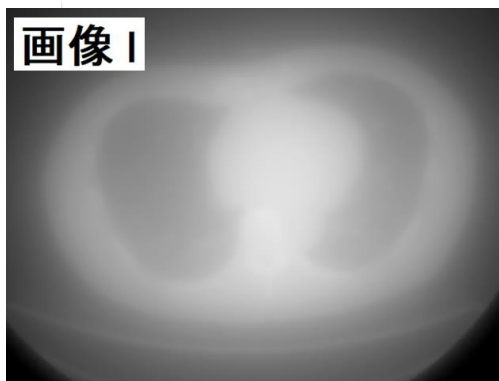
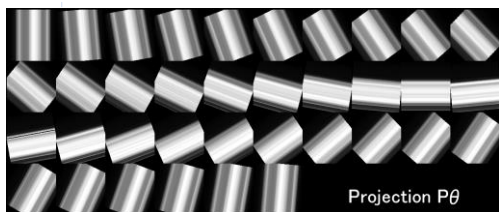
回転中心からの距離 r に反比例した濃度に補正するフィルタ $1/r$ を正確な断層像 g に畳み込んだ像が I である。式で表現すると $I = g * (1/r)$ となる。 I 、 g 、 $1/r$ のフーリエ変換を L 、 G 、 $F(1/r)$ と表現すると、畳み込みの定理より $L = G \cdot F(1/r)$ となる。ここで $F(1/r) = 1/fr$ なので $L = G/fr$ $G = L \cdot fr$ この式を逆フーリエ変換して $g = I * h$

この式に、 $I = \int P_\theta d\theta$ を代入すると、
 $g = \int P_\theta d\theta * h$ 、 $g = \int (P_\theta * h) d\theta$
 (h は θ と独立した関数なので交換可)

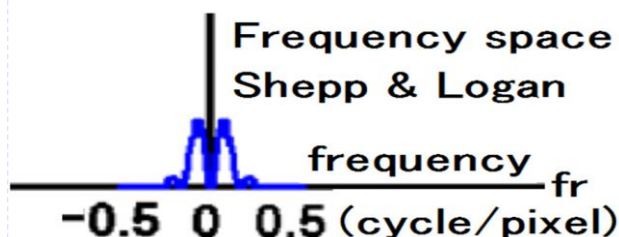
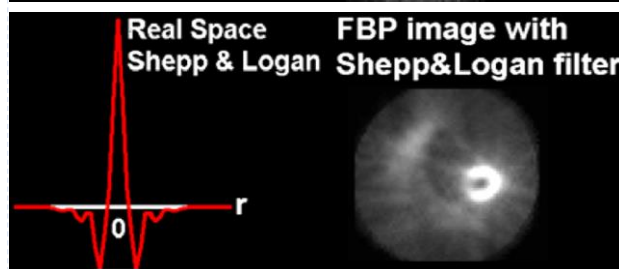
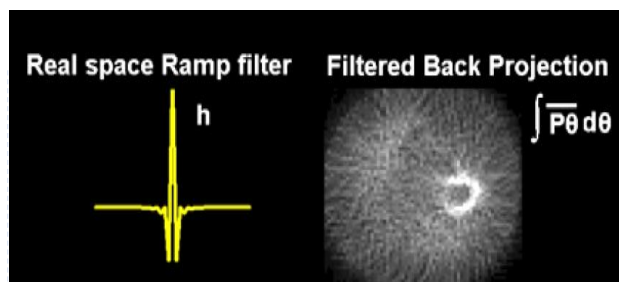
$$g = \int \overline{P_\theta} d\theta \quad (\overline{P_\theta} = P_\theta * h) \quad \text{FBPの式}$$

P_θ に実空間フィルタ h ($= fr$ の逆フーリエ変換) を畳み込めば、重ね合わせると正確な断層像 g になる 2 次元投影画像 $\overline{P_\theta}$ を算出できる。これを Filtered Back Projection (FBP) という。

Ramp フィルタ h を画像再構成フィルタという。



Shepp & Logan フィルタ、 プレフィルタ



Shepp & Logan フィルタの式

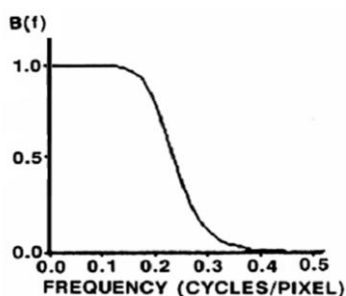
$$H(fr) = \left| \frac{f_0}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi fr}{f_0}\right) \right| \text{sinc}^2\left(\frac{fr}{f_0}\right), \quad \left(\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)$$

Rampフィルタは理論的には正確な再構成フィルタで、X線CTやPETなど投影データの画質が良好な場合は適切な断層画像を算出する。しかしSPECTなど投影データのカウン트가低く統計雑音が多い場合は、高周波成分のS/N比の悪さが影響して、左図の心筋SPECTのように放射状アーチファクトが目立つ断層画像を再構成する。

そこで、SPECT画像再構成には、S/N比の良くない高周波成分を抑制する効果を加えたShepp & Loganフィルタという画像再構成フィルタが用いられる。

周波数空間でナイキスト周波数に近い高周波成分の増幅を抑えることで、高周波雑音を低減させ、放射状アーチファクトが少ない断層像を再構成する。

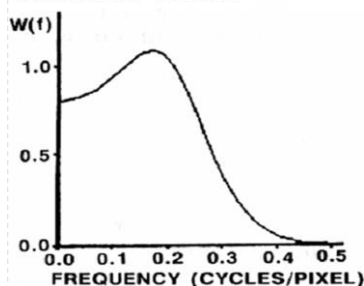
Butterworth filter



S/N比の良くないSPECT投影（プロジェクション）画像の高周波成分を抑制する方法として、再構成を行う前に、投影画像に高周波成分抑制フィルタをかける方法がある。これを前処理フィルタ、プレフィルタという。

良く使用される前処理フィルタは、バターワースフィルタ（Butterworth）である。ナイキスト周波数から中間周波数成分を左図のような連続関数で除去する。遮断周波数を決めるだけで使い易いフィルタである。

Wiener filter



凝った前処理フィルタとして、ウィナーフィルタ（Wiener）がある。通信技術にも使われているフィルタで、理論的に正確な雑音除去フィルタである。画像情報を多く含む中間周波数成分を増幅しながら、低周波成分の抑制と、ナイキスト周波数近くの高周波成分も抑制する効果をもつが、パラメータが多くて各症例に適切なウィナーフィルタを設定するのは臨床的にはかなり困難である。

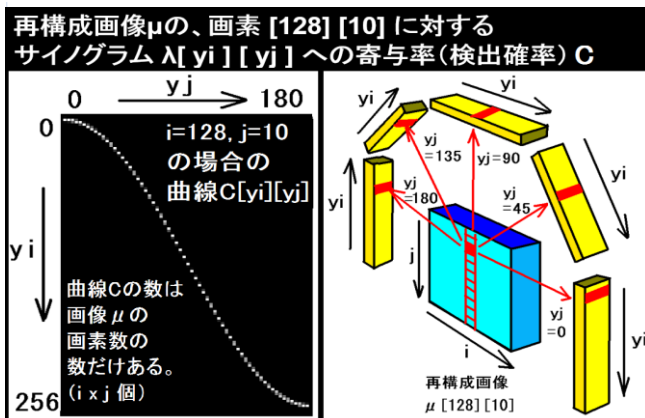
逐次近似画像再構成法

逐次近似再構成法 Iterative Reconstruction

PETやSPECT装置が収集した各々の角度における投影画像（Pθ）から断層画像を再構成する別の方法として確率的手法を用いた逐次近似画像再構成法がある。

フィルタ重畳逆投影法と比較し、投影データのカウン트가少なくても放射状アーチファクトが少なく、画質の良好な断層画像を算出できる再構成だが、短所として、計算時間が長い、繰り返し回数を決める理論がない（何回繰り返し計算をするか主観的に決める場合が多い）。したがって、再構成画像の定量性もフィルタ重畳逆投影法と比較し、不確かである。

MLEM（Maximum Likelihood Expectation Maximization）という方法が基本的な逐次近似再構成法であるが、計算量が多く時間がかかるので、これを改良したOSEM（Ordered Subsets Expectation Maximization）という計算時間を短縮できる方法が使用されている。



角度 y_j における座標 y_i の投影データ（サイノグラム）を $\lambda[y_i][y_j]$ と示す。

サイノグラムから再構成される断層画像を $\mu[i][j]$ とする。

逐次近似画像再構成法は、これらの4個の変数 y_i 、 y_j 、 i 、 j による4次元の繰り返し演算である。

再構成画像 μ の、画素 $[i][j]$ に対するサイノグラム $\lambda[y_i][y_j]$ への寄与率 C （検出確率）は4次元配列 $C[i][j][y_i][y_j]$ となる。

$$\lambda = \sum_{i,j} C \mu \quad (\text{サイノグラム} = \sum (\text{検出確率} \times \text{再構成画像}))$$

正確に記述すると $\lambda[y_i][y_j] = \sum_i \sum_j C[i][j][y_i][y_j] \mu^k[i][j]$

（ $\mu^k[i][j]$ は、 k 番目の繰り返し計算後の画像）

測定したサイノグラム λ と再構成画像 μ （初期値は全画素値1）について $\lambda / (\sum C \mu)$ を求める。

$$\lambda / (\sum C \mu) = \text{真のサイノグラム} / \text{画像}\mu\text{から推定されるサイノグラム}$$

推定画像 μ の画素値が、真の値より大きすぎると $\lambda / (\sum C \mu)$ は1未満になる。
推定画像 μ の画素値が、真の値より小さすぎると $\lambda / (\sum C \mu)$ は1以上になる。

撮像した全方向について $\lambda / \sum C \mu$ の平均（検出確率 C をかけた加重平均）を求める。式で表すと、

$$\sum_{y_j} C \left(\lambda / \sum_{i,j} C \mu \right) / \sum_{i,j} C \quad \text{この式の値は要素数が } i \times j \text{ の配列なので正確に記述すると、}$$

$$\sum_{y_j} \sum_{i,j} C[i][j][y_j] \left(\lambda[y_i][y_j] / \left(\sum_{i,j} \sum_{y_j} C[i][j][y_j] \mu_k[i][j] \right) \right) / \sum_{i,j} \sum_{y_j} C[i][j][y_j]$$

k 番目の再構成画像 μ_k の各画素ごとに $\sum_{y_j} C \left(\lambda / \left(\sum_{i,j} C \mu \right) \right) / \sum_{i,j} C$ の値をかけて、次の推定画像 μ_{k+1} の画素値を算出する。式で表すと、

$$\mu_{k+1} / \mu_k = \sum_{y_j} C \left(\lambda / \left(\sum_{i,j} C \mu \right) \right) / \sum_{i,j} C \quad \text{逐次近似再構成法 MLEM の式}$$

正確に記述すると

$$\mu_{k+1}[i][j] / \mu_k[i][j] = \frac{\sum_{y_j} C[i][j][y_j] \left(\lambda[y_i][y_j] / \left(\sum_{i,j} \sum_{y_j} C[i][j][y_j] \mu_k[i][j] \right) \right)}{\sum_{y_j} C[i][j][y_j]}$$

OSEM は、 y_j （サイノグラムの角度成分）の計算ループを間引いて

$C \left(\lambda / \left(\sum_{i,j} C \mu \right) \right) / \sum_{i,j} C$ の値を求めて、次の推定画像 μ の画素値を算出する。

例えば、 y_j が 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の 9 方向で、subsets を 3 に設定すれば、まず、 $y_j = 0, 3, 6$ の値で μ_k を計算する。

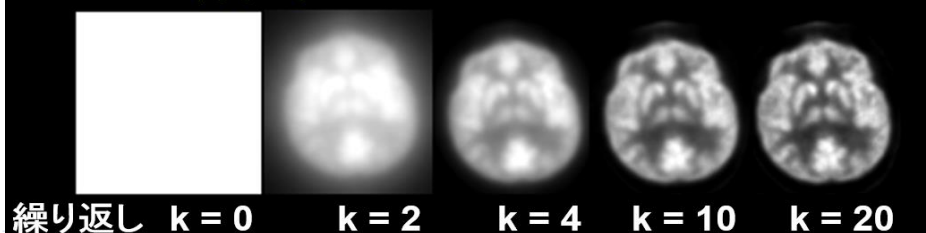
次に、 $y_j = 1, 4, 7$ の値で μ_k を基に μ_{k+1} を計算する。

更に、 $y_j = 2, 5, 8$ の値で μ_{k+1} を基に μ_{k+2} を計算する。

計算量は MLEM の 1 回繰り返しと同量だが、MLEM を 3 回繰り返した場合とほぼ同等の画像を得られるので、OSEM では計算量、計算時間が 1/3 になる。

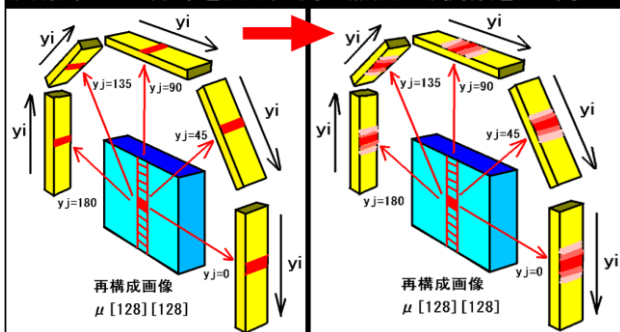
OSEM は、サイノグラムを全部使わないで断層画像を推定していくが、逐次異なる角度からのサイノグラムを使うのでプロジェクションデータは全部有効に利用している上で、計算の分量が減らせるアルゴリズムである。

OSEM 計算結果 繰り返し回数を多くするほど画像が鮮明化。



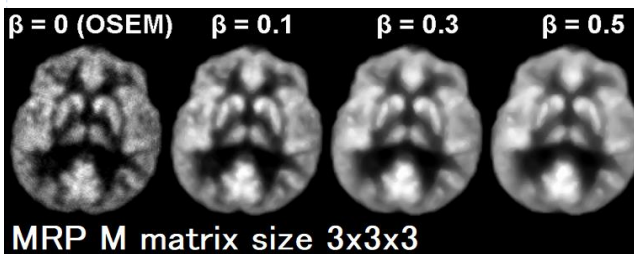
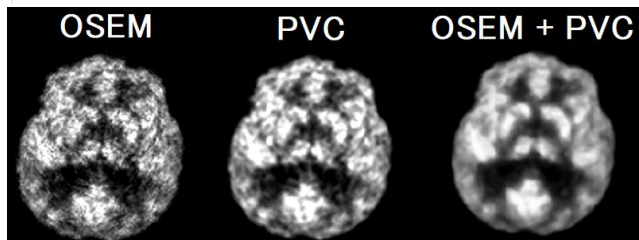
逐次近似画像再構成法は、プログラムの中に再構成画像の画質を改善させるために、様々な分布関数やアルゴリズムを加えられる長所がある。

再構成画像 μ の、各画素に対するサイノグラム λ への検出確率 C の分布を広くする。点広がり関数を加味。



PVC (Partial Volume Correction)

検出確率 C の分布に点広がり関数（ガウス分布）を加味すると、サイノグラム上で広がった分布が再構成画像上で1点に収束するので分解能が向上しノイズが抑制される。



MRP (Median Root Prior)

画像再構成MRP再構成法は、画像輪郭を保ちながら統計ノイズを抑制する。

画像の定量解析、統計解析に適する画質を導出する。ベイズ（Bayes）画像再構成法のひとつ。再構成式の中に条件式（先験確率 Prior）を加える。

$$\mu^{k+1} / \mu^k = \Sigma C (\lambda / \Sigma C \mu) / (\Sigma C + \text{Prior})$$

Prior は、着目する画素値 μ^k と周辺画素の中央値 M (median) の差が小さくなるように μ^{k+1} を修正する。

$$\text{Median Root Prior} = \beta (\mu^k - M) / M$$

M は、周辺画素（3x3画素など）の中央値（median）。 β は効果を調整するパラメータ（ $0 < \beta < 1$ ）。（ β が 0 の場合は一般の OSEM と同じ。）メディアンフィルタの効果を加えながら、サイノグラム（横から投影した全方向からのプロジェクションデータ）から、断層画像を逐次推定していく。